

Лекция 14. Классификация фундаментальных частиц и симметрии тензоров

А. А. Кецарис
(9 мая 2005 г.)

В этой лекции мы рассматриваем классификацию фундаментальных частиц, основанную на диаграммах Юнга, соответствующих симметриям тензоров. Каждому из стволов дерева Юнга ставятся в соответствие фундаментальные элементарные частицы определенного вида. При этом возникает необходимость введения гипотетических частиц: двухцветных лептонов, трехцветных кваркино, двухцветных лептино.

I. ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что мы поставили задачей найти единый подход к описанию фундаментальных частиц. Под *фундаментальными* мы понимаем частицы, не являющиеся составными и не относящиеся к промежуточным бозонам (частицам, переносящим взаимодействие). Прежде всего к фундаментальным частицам относятся лептоны и кварки трех поколений. Примером и образцом для нас является уже установленное описание лептонов. Пространство действия \mathbb{S} фундаментальной частицы мы рассматриваем как множество векторов вида

$$\psi = \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_{i_1} \psi^{i_1} + \epsilon_{i_2 i_1} \psi^{i_1 i_2} + \dots + \epsilon_{i_4 \dots i_2 i_1} \psi^{i_1 i_2 \dots i_n} + \dots$$

Здесь буквой ϵ обозначены базисные векторы. Это обозначение обобщает использованные ранее ϵ , κ , λ . Через ϵ_0 обозначена единица множества действительных чисел \mathbb{K} . Через ϵ_i обозначены базисные векторы пространства-времени СТО. Пространство векторов вида

$$\psi = \epsilon_{i_1} \psi^{i_1}$$

является образующим. Базисные векторы

$$\epsilon_{i_p \dots i_2 i_1} = \epsilon_{i_1} \circ \epsilon_{i_2} \circ \dots \circ \epsilon_{i_p},$$

где символ \circ означает умножение векторов в пространстве действия. Наличие на множестве векторов \mathbb{S} операций сложения и умножения делает это множество алгеброй, которую назовем *контравариантной алгеброй действия фундаментальной частицы*.*

*В представленной записи вектор ψ выглядит как бесконечномерный. Но если учесть, что, с одной стороны,

Аналогичным образом формируется пространство-время \mathbb{X} фундаментальной частицы.

Пространство действия ${}^+\mathbb{S}$ фундаментальной античастицы мы рассматриваем как множество векторов вида

$${}^+\psi = \psi_0 \mathfrak{E}^0 + \psi_{i_1} \mathfrak{E}^{i_1} + \psi_{i_2 i_1} \mathfrak{E}^{i_1 i_2} + \dots + \psi_{i_n \dots i_2 i_1} \mathfrak{E}^{i_1 i_2 \dots i_n} + \dots$$

Через \mathfrak{E}^0 обозначена единица множества действительных чисел \mathbb{K} . Через \mathfrak{E}^i обозначены базисные векторы сопряженного пространства-времени СТО.

$$\mathfrak{E}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathfrak{E}^{i_1} \circ \mathfrak{E}^{i_2} \circ \dots \circ \mathfrak{E}^{i_p},$$

Наличие на множестве векторов ${}^+\mathbb{S}$ операций сложения и умножения делает это множество алгеброй, которую назовем *ковариантной алгеброй действия фундаментальной античастицы*.

Аналогичным образом формируется пространство-время ${}^+\mathbb{X}$ фундаментальной античастицы.

Различные правила умножения базисных векторов ϵ_i приводят к разным алгебрам и разным фундаментальным частицам. Вместе с тем различные правила умножения базисных векторов ϵ_i приводят к разным свойствам тензоров второго, третьего и четвертого рангов при перестановке индексов. В результате свойства структурных матриц, свойства квантовых уравнений и, в конечном счете, свойства фундаментальных частиц определяются свойствами тензоров при перестановке индексов. Такие свойства тензоров изучаются с помощью *диаграмм Юнга*. Поэтому далее рассмотрим применение диаграмм Юнга к классификации алгебр фундаментальных частиц.

Для простоты изложения примем следующие условия

1. Далее не будем различать ко- и контравариантные компоненты тензора. Например, компонента $\psi^{i_1 i_2 \dots i_n}$ будет для нас не отличима от $\psi_{i_n \dots i_2 i_1}$.
2. Будем опускать обозначения тензора и индексов а оперировать только с номерами индексов. Номер

произведение одинаковых базисных векторов есть скалярное произведение, то есть число. А с другой стороны, образующие базисные векторы подчиняются определенным перестановочным соотношениям. То тогда вектор ψ принимает вид

$$\psi = \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_{i_1} \psi^{i_1} + \epsilon_{i_2 i_1} \psi^{i_1 i_2} + \epsilon_{i_3 i_2 i_1} \psi^{i_1 i_2 i_3} + \epsilon_{1324} \psi^{1324},$$

то есть, является конечномерным с числом координат, равным $2^4 = 16$.

ра индексов будем писать жирным шрифтом для того, чтобы в случае необходимости отличать эти числа от значений индексов. Так, например, вместо тензоров $\epsilon_{i_n \dots i_2 i_1}$, $\psi^{i_1 i_2 \dots i_n}$, $\psi_{i_n \dots i_2 i_1}$, $\mathcal{E}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ будем писать $\mathbf{123} \dots \mathbf{n}$.

3. Мы рассматриваем алгебры, в которых умножение двух одинаковых базисных векторов дает число, являющееся скалярным произведением этих векторов. Поэтому набор индексов с двумя одинаковыми значениями переходит в набор индексов, в котором эти значения отсутствуют. Например, $\mathbf{1(22)3} = \mathbf{13}$. Таким образом, мы заранее можем сказать, что произвольная комбинация индексов сводится к такой, в которой остаются только индексы с разными значениями. Поэтому набор чисел мы можем рассматривать либо как номера индексов либо как их значения. Например, комбинация чисел $\mathbf{123}$ может означать комбинацию индексов $i_1 i_2 i_3$ а может быть и значением этой комбинации при $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$. Далее будем придерживаться второй точки зрения.

Итак, рассмотрим симметризацию тензоров на основании диаграмм Юнга.

II. СИММЕТРИЗАЦИЯ ТЕНЗОРОВ. ДЕРЕВО ЮНГА

1. Необходимые определения

1. *Перестановка* – набор чисел от 1 до n в определенном порядке. Например, $(\mathbf{132})$ для $n = 3$. Число перестановок равно $n!$.

2. *Подстановка* – отображение одной перестановки в другую. Например, $\sigma(\mathbf{132}) = (\mathbf{312})$, $(\mathbf{132})$ – перестановка-аргумент, $(\mathbf{312})$ – перестановка-функция. Если перестановка-аргумент фиксирована, например, представляет собой набор чисел в порядке возрастания $(\mathbf{123} \dots \mathbf{n})$, то подстановки изоморфны перестановкам. Отсюда число подстановок равно $n!$.

3. *Транспозиция* – подстановка, меняющая в перестановке местами два числа. Например, $\sigma(\mathbf{1324}) = (\mathbf{4321})$.

4. *Соседняя транспозиция* – подстановка, меняющая в перестановке местами два расположенных рядом числа. Например, $\sigma(\mathbf{1324}) = (\mathbf{1234})$.

5. Подстановка $\sigma(\mathbf{123} \dots \mathbf{n}) = (\mathbf{23} \dots \mathbf{n1})$ называется *циклической* или *круговой*. Число циклических подстановок равно n .

6. *Инверсия*. В перестановке числа i и j , где i левее j составляют инверсию, если $i > j$. В перестановке $(\mathbf{123} \dots \mathbf{n})$ число инверсий равно нулю. Перестановка *четная*, если она состоит из четного числа инверсий и наоборот. Например, перестановка $(\mathbf{451362})$ содержит 8 инверсий, а перестановка $(\mathbf{38524671})$ содержит 15 инверсий. Подстановка σ *четная*, если перестановка $\sigma(\mathbf{123} \dots \mathbf{n})$ состоит из четного числа инверсий и наоборот. Например, подста-

новка $\sigma(\mathbf{123456}) = (\mathbf{451362})$ четная, а подстановка $\sigma(\mathbf{12345678}) = (\mathbf{38524671})$ нечетная.

7. На перестановках вводится *сложение* и *умножение на число*. В результате рассматриваются *линейные комбинации* перестановок. Например,

$$\langle \mathbf{12} \rangle = \mathbf{12} + \mathbf{21}, \quad [\mathbf{12}] = \mathbf{12} - \mathbf{21}.$$

8. Соответственно на подстановках вводится *сложение* и *умножение на число*. В результате рассматриваются *линейные комбинации* подстановок. Например, $[\mathbf{12}] = \sigma(\mathbf{12})$, где $\sigma = \sigma_1 + (-1) \cdot \sigma_2$, а $\sigma_1(\mathbf{12}) = (\mathbf{12})$ и $\sigma_2(\mathbf{12}) = (\mathbf{21})$.

9. Последовательное выполнение нескольких подстановок (например, σ_1 и σ_2) равносильно выполнению некоторой подстановки

$$\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1,$$

называемой *произведением* подстановок σ_1 и σ_2 . Всякая подстановка может быть представлена в виде произведения соседних транспозиций. Относительно произведения подстановки образуют *группу*. А так как на подстановках введены *сложение* и *умножение на число*, то подстановки образуют *алгебру*.

2. Симметризация тензоров

Сначала остановимся на простейших случаях симметризации тензорных индексов путем их транспозиции.

Выделим, прежде всего, два типа тензоров. *Симметричные* тензоры, то есть сохраняющие знак при соседней транспозиции. И *антисимметричные* тензоры, изменяющие знак при соседней транспозиции. Для них будем использовать следующие обозначения.

- Для симметричных тензоров

– второго ранга

$$\langle \mathbf{12} \rangle = (\mathbf{12} + \mathbf{21}) \cdot \frac{1}{2},$$

– третьего ранга

$$\langle \mathbf{123} \rangle = (\mathbf{123} + \mathbf{231} + \mathbf{312} + \mathbf{213} + \mathbf{132} + \mathbf{321}) \cdot \frac{1}{3!},$$

– n -го ранга

$$\langle \mathbf{12} \dots \mathbf{n} \rangle = \left(\sum_{\sigma} \sigma(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) \right) \cdot \frac{1}{n!},$$

где суммирование выполняется по всем подстановкам σ .

- Для антисимметричных тензоров

– второго ранга

$$[\mathbf{12}] = (\mathbf{12} - \mathbf{21}) \cdot \frac{1}{2},$$

– третьего ранга

$$[\mathbf{123}] = (\mathbf{123} + \mathbf{231} + \mathbf{312} - \mathbf{213} - \mathbf{132} - \mathbf{321}) \cdot \frac{1}{3!},$$

– n -го ранга

$$[\mathbf{12} \dots \mathbf{n}] = \left(\sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \cdot \sigma(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) \right) \cdot \frac{1}{n!},$$

где суммирование выполняется по всем подстановкам σ . Выражение $\text{sign}(\sigma)$ равно $(+1)$ или (-1) в зависимости от того, является ли подстановка четной или нечетной.

Рассмотрим далее разложение тензоров на сумму, содержащую симметричные и антисимметричные слагаемые. Такое разложение назовем *симметризацией* тензора, а слагаемые, на которые разлагается тензор, назовем *симметриями*.

1. Симметризация тензора второго ранга.

Очевидно, для тензора второго ранга имеет место

$$\mathbf{12} = \langle \mathbf{12} \rangle + [\mathbf{12}].$$

2. Симметризация тензора третьего ранга.

Тензор $\mathbf{123}$ не разлагается на сумму только симметричных и антисимметричных слагаемых. Действительно,

$$\langle \mathbf{123} \rangle + [\mathbf{123}] = (\mathbf{123} + \mathbf{231} + \mathbf{312}) \cdot \frac{1}{3}.$$

Поэтому разложение тензора $\mathbf{123}$ требует привлечения дополнительных слагаемых. Вид этих слагаемых устанавливается с помощью процедуры Юнга, которую мы рассмотрим в следующем разделе. Забегая вперед, скажем, что тензор 3-го ранга может быть представлен в виде суммы симметрий.

$$\mathbf{123} = ((\mathbf{123})_1 + (\mathbf{123})_2 + (\mathbf{123})_3 + (\mathbf{123})_4) \cdot \frac{3}{2},$$

где

$$(\mathbf{123})_1 = [\mathbf{123}], \quad (\mathbf{123})_4 = \langle \mathbf{123} \rangle,$$

$$(\mathbf{123})_2 = (\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312} - \mathbf{213} - \mathbf{132} + \mathbf{321}) \cdot \frac{1}{3!},$$

$$(\mathbf{123})_3 = (\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312} + \mathbf{213} + \mathbf{132} - \mathbf{321}) \cdot \frac{1}{3!}.$$

Симметризация тензора произвольного ранга выполняется, на основании процедуры Юнга, которую рассмотрим далее.

3. Процедура Юнга.

Разложение тензора произвольного ранга n на сумму, содержащую симметричные и антисимметричные слагаемые $\langle 12 \dots n \rangle$ и $[12 \dots n]$, осуществляется с помощью процедуры Юнга. Разложим число индексов n (ранг тензора) на сумму r слагаемых

$$n = \sum_{i=1}^r \alpha_i,$$

где $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r \geq 1$. Например, число $n = 3$ допускает следующие разложения:

$$3 = 1 + 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 3 = 3,$$

В первом случае $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, r = 3$. Во втором случае $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, r = 2$. В третьем случае $\alpha_1 = 3, r = 1$. Пусть число разложений ранга тензора n равно s , а m – текущий индекс, нумерующий эти разложения, тогда текущее разложение запишем следующим образом

$$n(m) = \sum_{i=1}^{r_m} \alpha_i^m,$$

где m принимает значения от 1 до s . Набор чисел $\alpha(m) = (\alpha_1^m, \alpha_2^m, \dots, \alpha_{r_m}^m)$ называется *системой Юнга*. Например, для $n = 2$ имеют место следующие системы Юнга

$$\alpha(1) = (1, 1), \quad \alpha(2) = (2),$$

для $n = 3$ имеют место следующие системы Юнга

$$\alpha(1) = (1, 1, 1), \quad \alpha(2) = (2, 1), \quad \alpha(3) = (3),$$

а для $n = 4$ имеют место системы Юнга:

$$\alpha(1) = (1, 1, 1, 1), \quad \alpha(2) = (2, 1, 1), \\ \alpha(3) = (2, 2), \quad \alpha(4) = (3, 1), \quad \alpha(5) = (4).$$

На множестве систем Юнга для заданного числа n целесообразно ввести отношение порядка. Система $\alpha(m) = (\alpha_1^m, \alpha_2^m, \dots, \alpha_{r_m}^m) >$ системы $\beta(n) = (\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_{r_n}^n)$, если $\alpha_i^m > \beta_i^n$ для первого i из значений $1, 2, \dots, \min(r_m, r_n)$. Например, $(3, 2) > (3, 1, 1) > (2, 2, 1)$.

Каждой системе Юнга ставится в соответствие *диаграмма Юнга* – таблица из r_m строк по α_i^m клеток в i -ой строке. Так системе Юнга $(2, 1)$ для $n = 3, r = 2$ соответствует диаграмма Юнга:

$$r \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right.$$

Число клеток в таблице равно числу индексов n (рангу тензора).

1. Симметризация тензора второго ранга.

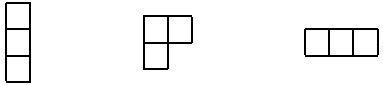
Симметризация тензора второго ранга использует системы Юнга $\alpha(1) = (1, 1)$, $\alpha(2) = (2)$. Таким системам соответствуют диаграммы Юнга:



Первая диаграмма представляет антисимметричный тензор, вторая – симметричный.

2. Симметризация тензора третьего ранга.

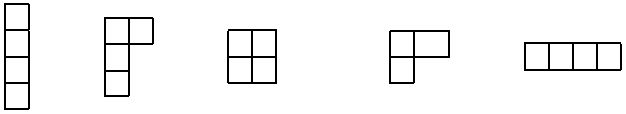
Симметризация тензора третьего ранга использует системы Юнга $\alpha(1) = (1, 1, 1)$, $\alpha(2) = (2, 1)$, $\alpha(3) = (3)$. Таким системам соответствуют диаграммы Юнга:



Первая и третья диаграммы представляют антисимметричный и симметричный тензоры. Тензоры, соответствующие второй диаграмме, рассмотрены далее.

3. Симметризация тензоров четвертого ранга.

Симметризация тензора четвертого ранга использует системы Юнга $\alpha(1) = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha(2) = (2, 1, 1)$, $\alpha(3) = (2, 2)$, $\alpha(4) = (3, 1)$, $\alpha(5) = (4)$. Таким системам соответствуют диаграммы Юнга:



Первая и пятая диаграммы представляют антисимметричный и симметричный тензоры. Тензоры, соответствующие второй, третьей и четвертой диаграммам, рассмотрены в Разделе II.4.

В клетках диаграммы Юнга размещаются все числа от 1 до n , нумерующие индексы тензора.

Например,

Диаграмма Юнга обозначается символом – $D_{\alpha(m)}$. На числа диаграммы $D_{\alpha(m)}$ вводится группа подстановок $S(n)$. В $S(n)$ имеются следующие подгруппы, связанные с диаграммой $D_{\alpha(m)}$:

1. P – подстановки, действующие внутри строки, не меняющие набор чисел в строке;
2. Q – подстановки, действующие внутри столбца, не меняющие набор чисел в столбце.

Каждой диаграмме Юнга поставим в соответствие два оператора, переставляющих числа диаграммы, – симметризаторы Юнга:

$$C_1(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) = \sum_{q,p} \text{sign}(q) \cdot p \circ q(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) \quad \text{и}$$

$$C_2(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) = \sum_{p,q} \text{sign}(q) \cdot q \circ p(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}),$$

где p пробегает подстановки подгруппы P , а q – подстановки подгруппы Q , $\text{sign}(q) = 1$, если подстановка q четная, и $\text{sign}(q) = -1$, если подстановка q нечетная.

В частном случае, когда диаграмма $D_{\alpha(m)}$ состоит из одной строки, что соответствует случаю $\alpha = (\alpha_1) = n$, $Q = 1$, симметризатор

$$C_1(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) = C_2(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) = \sum_p p(\mathbf{12} \dots \mathbf{n})$$

определяет симметричный тензор. Если $D_{\alpha(m)}$ состоит из одного столбца, то $\alpha = (\overbrace{1, \dots, 1}^n)$, $P = 1$, а симметризатор

$$C_1(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) = C_2(\mathbf{12} \dots \mathbf{n}) = \sum_q \text{sign } q \cdot q(\mathbf{12} \dots \mathbf{n})$$

определяет антисимметричный тензор.

Каждая оцифрованная диаграмма снабжается направленным отрезком, указывающим направление соседней транспозиции. Например,



Причем вертикальная часть отрезка соответствует антисимметричной транспозиции, а горизонтальная часть отрезка соответствует симметричной транспозиции. Указание направления соседней транспозиции позволяет поставить в соответствие диаграммам Юнга перестановочные соотношения для образующих базисных векторов и, следовательно, алгебру фундаментальной частицы. Например, из вышеприведенной диаграммы следуют перестановочные соотношения

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}. \quad (1)$$

Или

$$\langle \mathbf{12} \rangle = 0, \quad [\mathbf{13}] = 0, \quad \langle \mathbf{23} \rangle = 0. \quad (2)$$

Необходимо отметить, что перестановочные соотношения определяют симметрии тензора произвольного ранга. Так из соотношений (1) для симметрии тензора третьего ранга, соответствующего вышеприведенной диаграмме, следует

$$\mathbf{123} = (\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312} - \mathbf{213} - \mathbf{132} + \mathbf{321}) \cdot \frac{1}{3!},$$

То есть $\mathbf{123} = (\mathbf{123})_2$, введенном в Разделе II.2.

Так же диаграмме



соответствуют перестановочные соотношения

$$12 = 21, \quad 13 = -31, \quad 23 = 32,$$

из которых следует, что

$$123 = (123 - 231 - 312 + 213 + 132 - 321) \cdot \frac{1}{3!}.$$

То есть

$$123 = (123)_3.$$

Процедура построения систем Юнга, диаграмм Юнга, их оцифровка и указание направления соседней транспозиции позволяет рассмотреть симметрии тензоров произвольного ранга. Для этого удобно воспользоваться *деревом Юнга*.

4. Дерево Юнга.

Диаграммы Юнга для тензоров ранга $1, 2, \dots, n$, соединенные *графами*, будем называть *деревом Юнга*. Диаграммы Юнга, относящиеся к тензору ранга n , будем называть *уровнем n дерева Юнга*. Диаграммы дерева Юнга оцифровываются номерами индексов в соответствии с выбираемым порядком и снабжаются направленным отрезком, указывающим направление соседней транспозиции. Построение дерева Юнга подчиняется рекуррентному правилу: диаграммы уровня n получаются из диаграмм уровня $(n - 1)$ добавлением в строку и в столбец клетки с новым индексом. Диаграммы, связанные этим правилом, соединяются графом. Направленный отрезок, указывающий направление соседней транспозиции, диаграммы, находящейся в конце графа, включает в себя направленный отрезок, указывающий направление соседней транспозиции, диаграммы, находящейся в начале графа. На рис. 1 приведено трехуровневое дерево Юнга, то есть дерево для тензоров ранга 1, 2, 3.

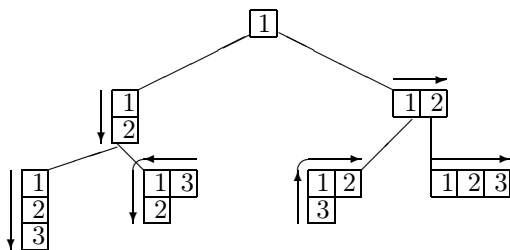


РИС. 1. Трехуровневое дерево Юнга.

На приведенном дереве Юнга первым по порядку рассматривается индекс **1**, затем **2**, затем **3**.

Тензоры ранга n , поставленные в соответствие диаграммам уровня n , есть *симметрии* исходного тензора ранга n . На симметриях одного уровня введем нумерацию путем сопоставления симметрии того номера, который получает соответствующая диаграмма при перечислении диаграмм этого уровня слева направо. Например, для тензора ранга 3 имеем четыре вида симметрии:

$$(123)_1 = [123], \quad (123)_2, \quad (123)_3, \quad (123)_4 = \langle 123 \rangle.$$

Это как раз те симметрии, на которые разлагается тензор **123**.*

Дерево Юнга мы будем использовать для классификации фундаментальных частиц. При этом дерево Юнга, оцифрованное по порядку **1, 2, 3**, мы поставим в соответствие фундаментальным частицам первого поколения. Такое дерево Юнга (рис. 1) будем называть *деревом Юнга первого поколения*. По нашему представлению[†] переход от фундаментальных частиц первого поколения к фундаментальным частицам второго и третьего поколений связан с циклической перестановкой геометрических базисных векторов, то есть с циклическими подстановками $\sigma(123)$. Поэтому второму поколению фундаментальных частиц поставим в соответствие дерево Юнга, оцифрованное по порядку **3, 1, 2** (рис. 2). Такое дерево Юнга будем называть *деревом Юнга второго поколения*.

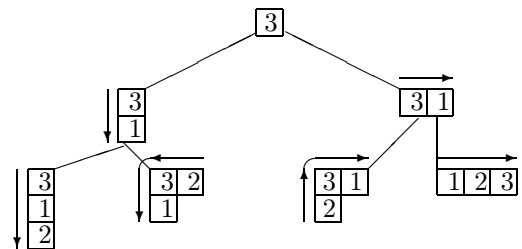


РИС. 2. Трехуровневое дерево Юнга второго поколения

Третьему поколению фундаментальных частиц поставим в соответствие дерево Юнга, оцифрованное по порядку **2, 3, 1** (рис. 3). Такое дерево Юнга будем называть *деревом Юнга третьего поколения*.

*Смотри Раздел II.2.2.

†Смотри Лекции 5, 12.

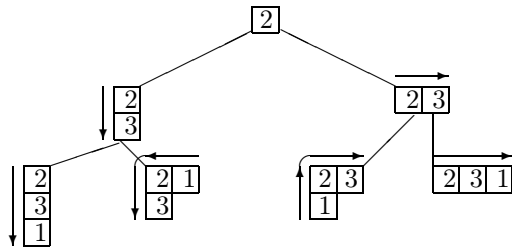


РИС. 3. Трехуровневое дерево Юнга третьего поколения

Так как число циклических подстановок равно числу индексов, то есть трем, то число поколений фундаментальных частиц равно трем и, соответственно, число деревьев Юнга равно трем.

Используя приведенные соображения, построим четырехуровневое дерево Юнга первого поколения. (рис. 4)

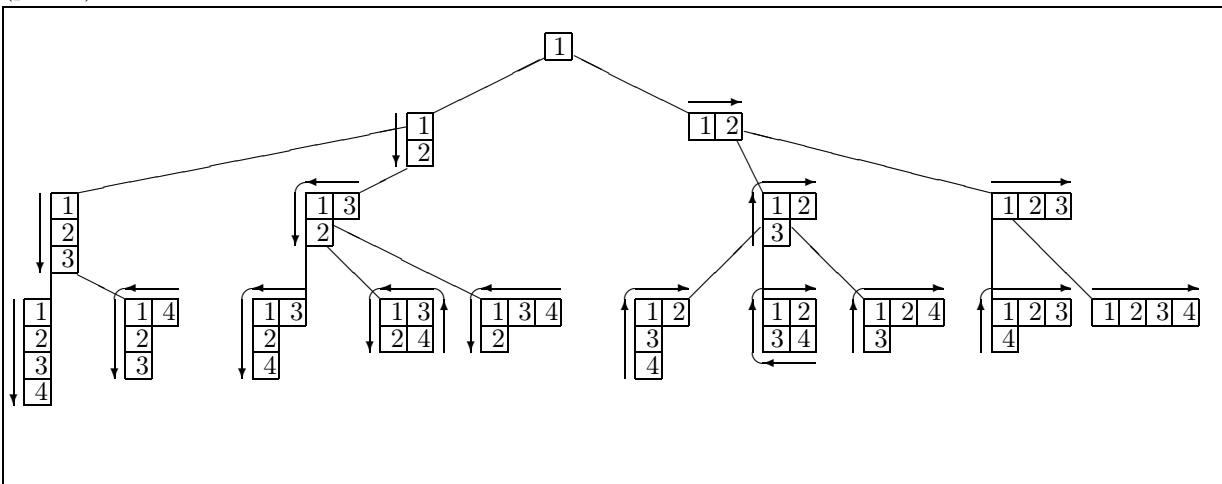


РИС. 4. Четырехуровневое дерево Юнга первого поколения.

Четырехуровневое дерево Юнга второго и третьего поколений отличаются оцифровкой диаграмм первых трех уровней в соответствии с рис. 2 и рис. 3

На четвертом уровне дерева Юнга имеем десять симметрий, которые пронумеруем от 1 до 10. Перестановочные соотношения для выбранной симметрии устанавливаются по направленному отрезку соседней транспозиции. Зная перестановочные соотношения, можно записать выбранную симметрию.

Например, для второй диаграммы четвертого уровня имеем перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} 12 &= -21, & 13 &= -31, & 23 &= -32, \\ 14 &= 41, & 24 &= -42, & 34 &= -43. \end{aligned}$$

Отсюда для второй симметрии имеем *

$$\begin{aligned} (1234)_2 &= (1234 - 2134 + 2314 - 3214 + 3124 - 1324 \\ &+ 2341 - 3241 + 3421 - 4321 + 4231 - 2431 \\ &- 3412 + 4312 - 4132 - 1432 + 1342 - 3142 \\ &+ 4123 + 1423 - 1243 + 2143 + 2413 - 4213) \cdot \frac{1}{6!}. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим классификацию фундаментальных частиц на основании дерева Юнга.

III. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Дадим определения, которыми установим связь между введенными понятиями и фундаментальными частицами. Пусть даны универсальные алгебры \mathbb{S} и ${}^+\mathbb{S}$. Воспользуемся деревом Юнга (рис. 4) для

того, чтобы разложить базисные векторы этих алгебр $\epsilon_0, \epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2 i_1}, \dots, \epsilon_{i_n \dots i_2 i_1}$ и соответственно $\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}^{i_1}, \mathfrak{E}^{i_1 i_2}, \dots, \mathfrak{E}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ по симметриям.[†]

Каждый набор базисных векторов, соответствующий некоторому стволу в дереве Юнга, определяет подпространство в пространстве \mathbb{S} , относящееся

*Интересно отметить, что общеизвестное определение детерминанта квадратной матрицы согласуется только с алгеброй Клиффорда. Привлечение другой алгебры требует корректировки в определении детерминанта.

[†]Нужно иметь в виду, что дерево Юнга, представленное на рис. 4 мы отнесем к фундаментальным частицам первого поколения, поэтому наши дальнейшие соображения напрямую связаны с этими частицами. Аналогичные выкладки необходимо выполнить для деревьев второго и третьего поколений.

к определенной фундаментальной частице. Назовем пространство алгебры \mathbb{S} , представленное в виде суммы подпространств, соответствующих разложению базисных векторов по дереву Юнга, *пространством фундаментальных частиц*. Соответственно пространство алгебры ${}^+\mathbb{S}$, представленное в виде суммы подпространств, соответствующих разложению базисных векторов по дереву Юнга, *пространством фундаментальных античастиц*.

На уровне тензора второго ранга дерево Юнга разделяется на две ветви. Одна ветвь имеет *вершинной* диаграмму $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ и соответственно антисимметричный тензор $[12]$, другая ветвь имеет вершиной диаграмму $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ и соответственно симметричный тензор (12) .

Далее вспомним, что согласно Лекции 8 для лептонов антисимметричные базисные векторы $\mathfrak{E}^{[ab]}$ представляют собой базисные векторы *спина* и в регулярном представлении выражаются через матрицы Паули. Кроме того, направление 12 является *основным* для фундаментальных частиц первого поколения. Таким образом, ветвь дерева Юнга, опирающаяся на диаграмму $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ соответствует фундаментальным частицам первого поколения с отличным от нуля спином по основному направлению.

В соответствии с этим подпространство пространства \mathbb{S} , построенное на базисных векторах $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_{i_1}$ и базисных векторах *ветви* дерева Юнга с вершиной $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, отнесем к фундаментальным фермионам и назовем *пространством фундаментальных фермионов* \mathbb{F} . Соответствующую ветвь дерева Юнга будем называть *фермионной* (рис. 5). Далее, говоря о пространствах частиц с базисными векторами \mathfrak{e} , будем полагать, что аналогичные соображения относятся к пространствам античастиц с базисными векторами \mathfrak{E} .

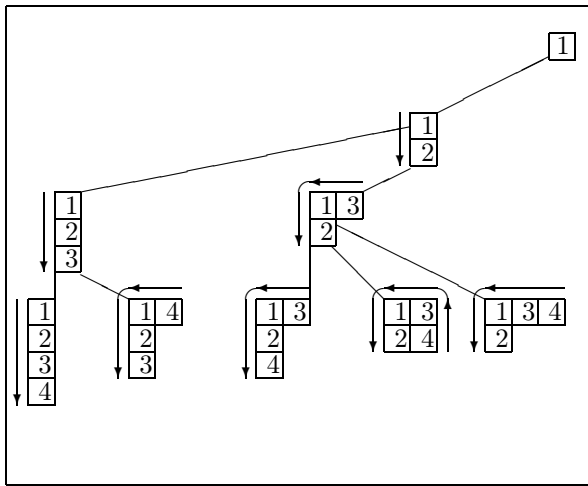


РИС. 5. Фермионная ветвь дерева Юнга.

Логика привлечения дерева Юнга для классифи-

кации фундаментальных частиц требует соответствующей интерпретации для второй ветви дерева Юнга. Пространству, построенному на базисных векторах этой ветви, поставим в соответствие гипотетические частицы. А так как для рассматриваемой ветви антисимметричные тензоры второго ранга по основному направлению равны нулю, то спин этих частиц по основному направлению следует считать равным нулю. В связи с этим подпространство пространства \mathbb{S} , построенное на базисных векторах $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_{i_1}$ и базисных векторах ветви дерева Юнга с вершиной $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, отнесем к гипотетическим частицам, которые назовем *фундаментальными бозонами*. Упомянутое пространство назовем *пространством фундаментальных бозонов* и обозначим \mathbb{B} . Соответствующую ветвь дерева Юнга будем называть *бозонной* (рис. 6).

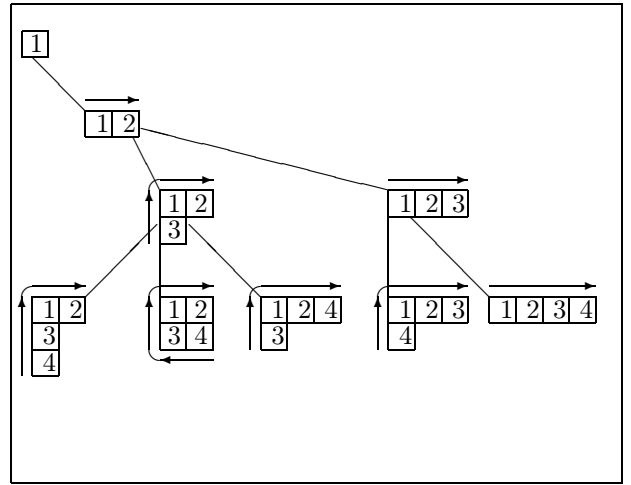


РИС. 6. Бозонная ветвь дерева Юнга.

Между фермионной и бозонной ветвями (пространствами фундаментальных фермионов и бозонов) имеет место симметрия в том смысле, что каждой диаграмме фермионной ветви дерева Юнга соответствует диаграмма бозонной ветви дерева Юнга. Эту симметрию будем называть *суперсимметрией*.

Спин фундаментальных фермионов по основному направлению $\mathfrak{E}^{[ab]}$ ($a \neq b$) отличен от нуля. У фундаментальных бозонов спин по основному направлению отсутствует. Однако, фундаментальные бозоны могут быть охарактеризованы динамическим параметром, суперсимметричным спином, который мы назвали *инерцией*. Базисными векторами инерции служат симметричные векторы $\mathfrak{E}^{(ab)}$ ($a \neq b$). У фундаментальных фермионов инерция по основному направлению отсутствует.

На уровне тензора третьего ранга фермионная ветвь разделяется на две ветви. Одна ветвь имеет *вершинной* диаграмму $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ и соответственно антисимметричный тензор $[123]$, другая ветвь имеет вершиной

диаграмму $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ и соответственно тензор смешанной симметрии $(\mathbf{123})_2$. Этим ветвям поставим в соответствие два класса фундаментальных фермионов – лептоны и кварки.

Подпространство пространства \mathbb{F} , построенное на базисных векторах ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - [\mathbf{123}] - \dots,$$

отнесем к лептонам и назовем *пространством лептонов* \mathbb{C} , а ветвь – *лептонной* (рис. 7).

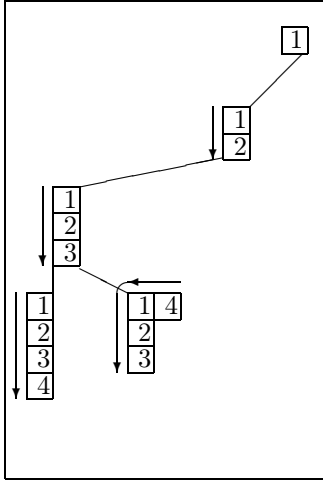


РИС. 7. Лептонная ветвь дерева Юнга.

Подпространство пространства \mathbb{F} , построенное на базисных векторах фермионной ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - (\mathbf{123})_2 - \dots,$$

отнесем к кваркам и назовем *пространством кварков* \mathbb{Q} , а ветвь – *кварковой* (рис. 8).

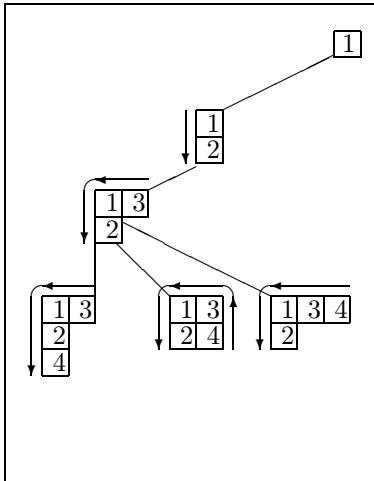


РИС. 8. Кварковая ветвь дерева Юнга.

Принцип суперсимметрии, заложенный в дереве Юнга, заставляет также разделить бозонную ветвь на две ветви на уровне тензора третьего ранга. Одна ветвь имеет *вершиной* диаграмму $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ и соответственно тензор смешанной симметрии $(\mathbf{123})_3$, другая ветвь имеет вершиной диаграмму $\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ и соответственно симметричный тензор $\langle \mathbf{123} \rangle$. Этим ветвям поставим в соответствие два гипотетических класса фундаментальных бозонов, которые назовем *кваркино* и *лептино*.

Подпространство пространства \mathbb{B} , построенное на базисных векторах бозонной ветви

$$\mathbf{1} - \langle \mathbf{12} \rangle - (\mathbf{123})_3 - \dots,$$

отнесем к кваркино и назовем *пространством кваркино* \mathbb{Q}^* , а ветвь – *кваркинной* (рис. 9).

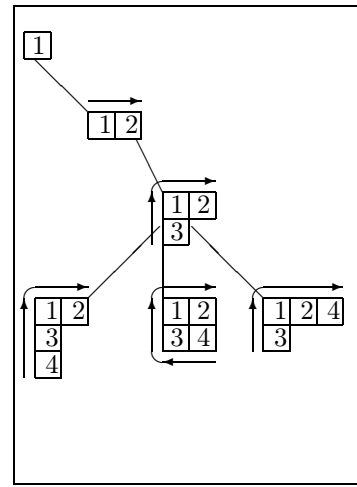


РИС. 9. Кваркинная ветвь дерева Юнга.

Подпространство пространства \mathbb{B} , построенное на базисных векторах ветви

$$\mathbf{1} - \langle \mathbf{12} \rangle - \langle \mathbf{123} \rangle - \dots,$$

отнесем к лептино и назовем *пространством лептино* \mathbb{C}^* , а ветвь – *лептинной* (рис. 10).

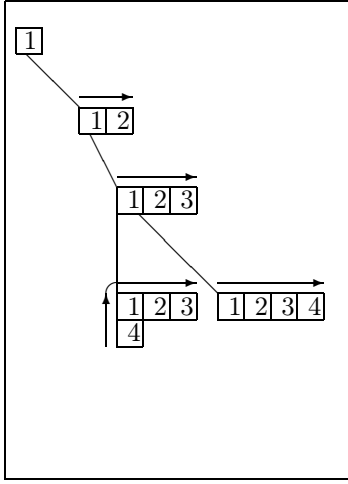


РИС. 10. Лептинная ветвь дерева Юнга.

Определим лептонный заряд L :

$$L = \begin{cases} 1, & \text{если } [123] \neq 0 \\ 0, & \text{если } [123] = 0, \end{cases}$$

Определим барионный заряд B :

$$B = \begin{cases} 1, & \text{если } (123)_2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } (123)_2 = 0, \end{cases}$$

Определим кварковый заряд B^* :

$$B^* = \begin{cases} 1, & \text{если } (123)_3 \neq 0 \\ 0, & \text{если } (123)_3 = 0 \end{cases}$$

Определим лептонный заряд L^* :

$$L^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle 123 \rangle \neq 0 \\ 0, & \text{если } \langle 123 \rangle = 0. \end{cases}$$

На уровне тензора четвертого ранга фермионная и бозонная ветви разделяются дополнительно. В свете указанного разделения рассмотрим сначала кварковую ветвь (рис. 8). Из нее следует, что кварки допускают классификацию на три типа в зависимости от типа симметрии тензора четвертого ранга $(1234)_3$, $(1234)_4$, $(1234)_5$. Эти типы кварков отождествим с цветными кварками соответственно красными, желтыми и синими. Таким образом, ствол кварковой ветви

$$1 - [12] - (123)_2 - (1234)_3$$

(рис. 11) определяет подпространство пространства \mathbb{Q} , которое отнесем к красным кваркам и назовем *пространством красных кварков* \mathbb{Q}_r .

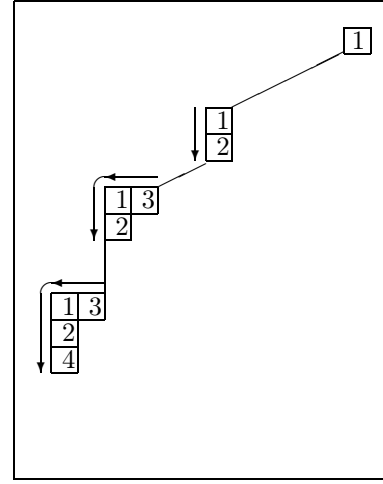


РИС. 11. Ствол красных кварков дерева Юнга.

Соответственно ствол кварковой ветви

$$1 - [12] - (123)_2 - (1234)_4$$

(рис. 12) и определяемое им подпространство \mathbb{Q}_y , отнесем к желтым кваркам.

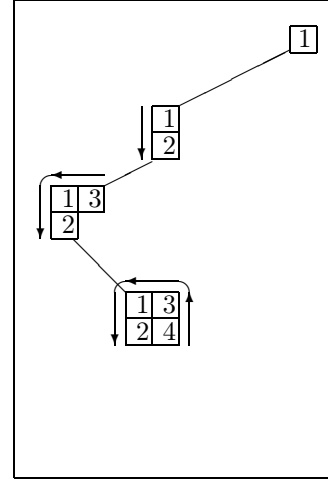


РИС. 12. Ствол желтых кварков дерева Юнга.

Соответственно ствол кварковой ветви

$$1 - [12] - (123)_2 - (1234)_5$$

(рис. 13) и определяемое им подпространство \mathbb{Q}_b , отнесем к синим кваркам.

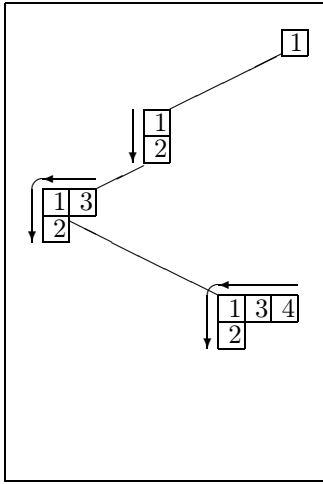


РИС. 13. Ствол синих кварков дерева Юнга.

Следуя логике дерева Юнга и рассматривая лептонную ветвь (рис. 7), необходимо заключить, что лептоны разделяются на два типа в зависимости от типа симметрии тензора четвертого ранга $[1234]$ и $(1234)_2$. Эти типы лептонов отождествим с гипотетическими *цветными лептонами* соответственно белыми и черными. Таким образом, ствол лептонной ветви

$$1 - [12] - [123] - [1234]$$

(рис. 14) определяет подпространство пространства \mathbb{C} , которое отнесем к белым лептонам и назовем *пространством белых лептонов* \mathbb{C}_w .

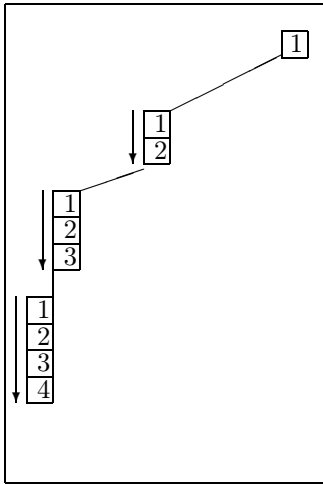


РИС. 14. Ствол белых лептонов дерева Юнга.

Соответственно ствол лептонной ветви

$$1 - [12] - [123] - (1234)_2$$

(рис. 15) и определяемое им подпространство \mathbb{C}_b , отнесем к черным лептонам.

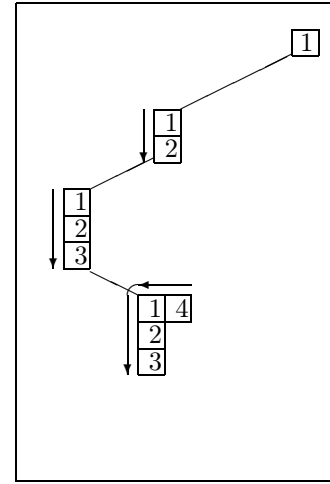


РИС. 15. Ствол черных лептонов дерева Юнга.

Заметим, что пространство \mathbb{C}_w является пространством алгебры Клиффорда. В настоящее время лептоны описываются волновой функцией, являющейся вектором алгебры Клиффорда \mathbb{C}_w и поэтому в сегодняшнем представлении лептоны выступают как одноцветные белые лептоны.

Подобно кваркам существование разноцветных лептонов должно проявляться в образовании бесцветных пар, которые должны вести себя как бозоны. Возможно, электронные пары, которые обуславливают явление сверхпроводимости, образованы разноцветными электронами.

Логика дерева Юнга заставляет разделить по *цвету* также гипотетические суперсимметричные частицы кваркино и лептино. В результате ствол кваркиновой ветви

$$1 - \langle 12 \rangle - (123)_3 - (1234)_6$$

(рис. 16) определяет подпространство пространства \mathbb{Q}^* , которое отнесем к синим кваркино и которое назовем *пространством синих кваркино* \mathbb{Q}_b^* .

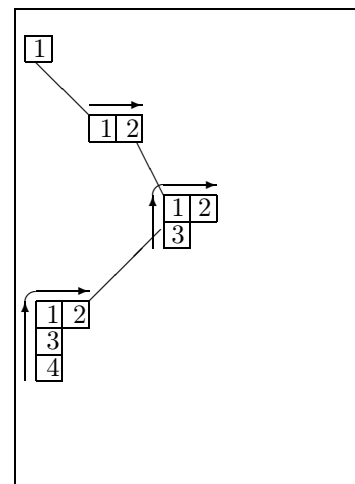


РИС. 16. Ствол синих кваркино дерева Юнга.

Соответственно ствол кваркинной ветви

$$1 - \langle 12 \rangle - (123)_3 - (1234)_7$$

(рис. 17) и определяемое им подпространство Q_y^* , отнесем к желтым кваркино .

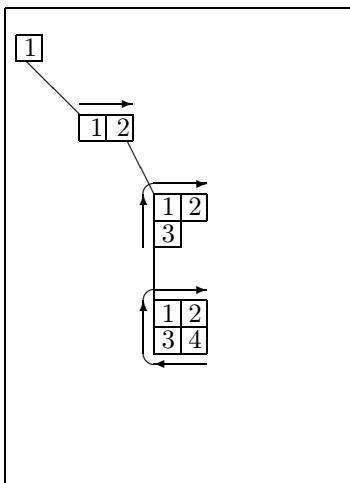


РИС. 17. Ствол желтых кваркино дерева Юнга.

Соответственно ствол кваркинной ветви

$$1 - \langle 12 \rangle - (123)_3 - (1234)_8$$

(рис. 18) и определяемое им подпространство Q_r^* , отнесем к красным кваркино.

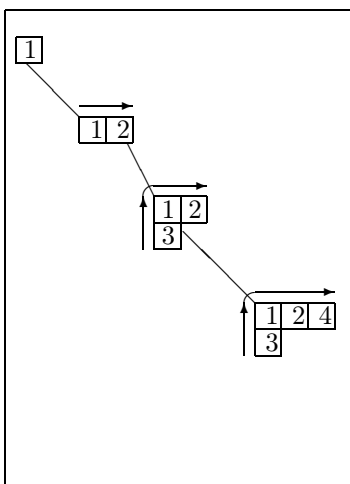


РИС. 18. Ствол красных кваркино дерева Юнга.

Следуя логике дерева Юнга и рассматривая лептинную ветвь (рис. 10) необходимо заключить, что лептино разделяются на два типа в зависимости от типа симметрии тензора четвертого ранга $(1234)_9$ и $\langle 1234 \rangle$. Эти типы лептино назовем соответственно черными и белыми. Таким образом, ствол лептинной ветви

$$1 - \langle 12 \rangle - \langle 123 \rangle - (1234)_9$$

(рис. 19) определяет подпространство пространства C^* , которое отнесем к черным лептино и назовем *пространством черных лептино* C_b^* .

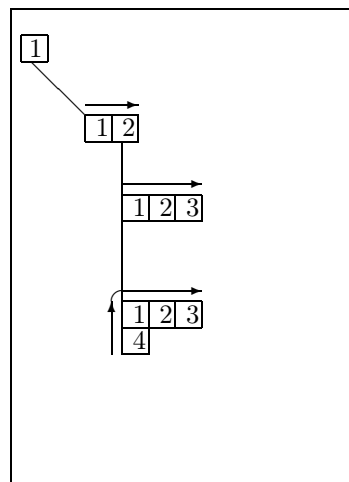


РИС. 19. Ствол черных лептино дерева Юнга.

Соответственно ствол лептинной ветви

$$1 - \langle 12 \rangle - \langle 123 \rangle - \langle 1234 \rangle$$

(рис. 20) и определяемое им подпространство C_w^* , отнесем к белым лептино.

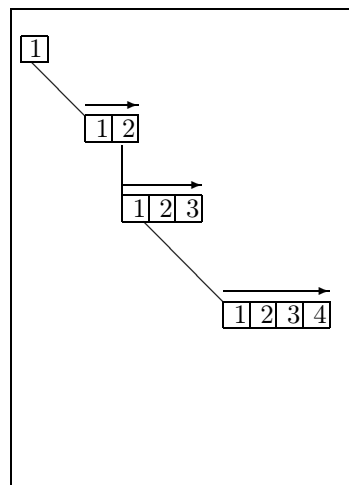


РИС. 20. Ствол белых лептино дерева Юнга.

IV. АЛГЕБРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Далее рассмотрим подалгебры алгебры фундаментальных частиц S , которые поставим в соответствие различным типам фундаментальных частиц – лептонам, кваркам и суперсимметричным им гипотетическим кваркино и лептино.

1. Алгебра лептонов

Пространственная часть волновой функции лептонов определена следующей диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения для геометрических базисных векторов алгебры лептонов

$$12 = -21, \quad 13 = -31, \quad 23 = -32.$$

В результате пространственная часть волновой функции лептонов имеет вид

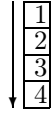
$$\psi = \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_a \psi^a + \epsilon_{[ab]} \psi^{[ba]} + \epsilon_{[123]} \psi^{[321]}.$$

Волновая функция лептона может быть представлена с помощью четырех компонент, каждая из которых является функцией над полем гиперчисел. Базисными гиперчислами для лептонов являются *

$$1 \cdot \mathbb{1}, \quad i \cdot \mathbb{1}, \quad b \cdot I, \quad a \cdot I.$$

1. Алгебра белых лептонов

Алгебра белых лептонов определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$12 = -21, \quad 13 = -31, \quad 23 = -32, \\ 14 = -41, \quad 24 = -42, \quad 34 = -43.$$

Отсюда пространство действия белых лептонов \mathbb{C}_w есть множество векторов вида

$$\psi = \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{[ik]} \psi^{[ki]} + \epsilon_{[ikl]} \psi^{[lki]} + \epsilon_{[1324]} \psi^{[4231]}.$$

Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{C}_w)^p$ то пространство алгебры белых лептонов \mathbb{C}_w представляет собой сумму пространств:

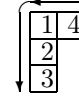
$$\mathbb{C}_w = \mathbb{C}^0 + \mathbb{C}^1 + (\mathbb{C}_w)^2 + (\mathbb{C}_w)^3 + (\mathbb{C}_w)^4.$$

Алгебра белых лептонов есть алгебра Клиффорда. Она была рассмотрена в Лекциях 5,6,7. Для базисных векторов алгебры Клиффорда мы использовали специальное обозначение ϵ .

*Напомним, что базисные гиперчисла мы выражаем через произведение чисел двух систем $(1, i, a, b)$ и $(\mathbb{1}, I, A, B)$.

2. Алгебра черных лептонов

Алгебра черных лептонов определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$12 = -21, \quad 13 = -31, \quad 23 = -32, \\ 14 = 41, \quad 24 = -42, \quad 34 = -43.$$

Отсюда пространство действия черных лептонов \mathbb{C}_b есть множество векторов вида

$$\psi = \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{[ab]} \psi^{[ba]} + \epsilon_{(14)} \psi^{(41)} + \epsilon_{[42]} \psi^{[24]} + \epsilon_{[34]} \psi^{[43]} + \epsilon_{[123]} \psi^{[321]} + \epsilon_{(124)_2} \psi^{(421)_2} + \epsilon_{(134)_2} \psi^{(431)_2} + \epsilon_{[234]} \psi^{[432]} + \epsilon_{(1324)_2} \psi^{(4231)_2}.$$

Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{C}_b)^p$ то пространство алгебры кварков \mathbb{C}_b представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_b = \mathbb{C}^0 + \mathbb{C}^1 + (\mathbb{C}_b)^2 + (\mathbb{C}_b)^3 + (\mathbb{C}_b)^4.$$

Эту алгебру мы рассмотрим в Лекции 15.

2. Алгебра кварков

Пространственная часть волновой функции кварков определена следующей диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения для геометрических базисных векторов алгебры кварков

$$12 = -21, \quad 13 = 31, \quad 23 = -32.$$

В результате пространственная часть волновой функции кварков имеет вид

$$\psi = \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_a \psi^a + \epsilon_{[21]} \psi^{[12]} + \epsilon_{(13)} \psi^{(31)} + \epsilon_{[32]} \psi^{[23]} + \epsilon_{(123)_2} \psi^{(321)_2}.$$

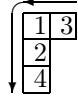
Волновая функция кварка может быть представлена с помощью четырех компонент, каждая из которых является функцией над полем гиперчисел. Базисными единицами гиперчисел для кварков являются

$$1 \cdot \mathbb{1}, \quad i \cdot B, \quad b \cdot A, \quad a \cdot I.$$

Алгебра кварков была рассмотрена в Лекциях 12,13. Для базисных векторов алгебры кварков мы использовали специальное обозначение λ .

1. Алгебра красных кварков

Алгебра красных кварков определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия красных кварков \mathbb{Q}_r есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{[21]} \psi^{[12]} + \epsilon_{\langle 13 \rangle} \psi^{\langle 31 \rangle} + \epsilon_{[32]} \psi^{[23]} + \\ &+ \epsilon_{\langle 14 \rangle} \psi^{\langle 41 \rangle} + \epsilon_{[42]} \psi^{[24]} + \epsilon_{\langle 34 \rangle} \psi^{\langle 43 \rangle} + \epsilon_{(123)_2} \psi^{(321)_2} + \\ &+ \epsilon_{[124]} \psi^{[421]} + \epsilon_{(134)_2} \psi^{(431)_2} + \epsilon_{[234]} \psi^{[432]} + \\ &+ \epsilon_{(1324)_3} \psi^{(4231)_3}. \end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{Q}_r)^p$ то пространство алгебры красных кварков \mathbb{Q}_r представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_r = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_r)^2 + (\mathbb{Q}_r)^3 + (\mathbb{Q}_r)^4.$$

Эта алгебра рассматривалась в Лекции 13.

2. Алгебра желтых кварков

Алгебра желтых кварков определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия желтых кварков \mathbb{Q}_y есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{[21]} \psi^{[12]} + \epsilon_{\langle 13 \rangle} \psi^{\langle 31 \rangle} + \epsilon_{[32]} \psi^{[23]} + \\ &+ \epsilon_{\langle 14 \rangle} \psi^{\langle 41 \rangle} + \epsilon_{[42]} \psi^{[24]} + \epsilon_{\langle 34 \rangle} \psi^{\langle 43 \rangle} + \epsilon_{(123)_2} \psi^{(321)_2} + \\ &+ \epsilon_{(124)_2} \psi^{(421)_2} + \epsilon_{(134)_2} \psi^{(431)_2} + \epsilon_{[234]} \psi^{[432]} + \\ &+ \epsilon_{(1324)_4} \psi^{(4231)_4}. \end{aligned}$$

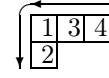
Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить \mathbb{Q}^p то пространство алгебры кварков \mathbb{Q} представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_y = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_y)^2 + (\mathbb{Q}_y)^3 + (\mathbb{Q}_y)^4.$$

Эта алгебра рассматривалась в Лекции 13.

3. Алгебра синих кварков

Алгебра синих кварков определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия синих кварков \mathbb{Q}_b есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{[21]} \psi^{[12]} + \epsilon_{\langle 13 \rangle} \psi^{\langle 31 \rangle} + \epsilon_{[32]} \psi^{[23]} + \\ &+ \epsilon_{\langle 14 \rangle} \psi^{\langle 41 \rangle} + \epsilon_{[42]} \psi^{[24]} + \epsilon_{\langle 34 \rangle} \psi^{\langle 43 \rangle} + \epsilon_{(123)_2} \psi^{(321)_2} + \\ &+ \epsilon_{(124)_2} \psi^{(421)_2} + \epsilon_{(134)_2} \psi^{(431)_2} + \epsilon_{(234)_2} \psi^{(432)_2} + \\ &+ \epsilon_{(1324)_5} \psi^{(4231)_5}. \end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{Q}_b)^p$ то пространство алгебры кварков \mathbb{Q}_b представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_b = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_b)^2 + (\mathbb{Q}_b)^3 + (\mathbb{Q}_b)^4.$$

Эта алгебра рассматривалась в Лекции 13.

3. Алгебра кваркино

Пространственная часть волновой функции кваркино определена следующей диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения для геометрических базисных векторов алгебры кваркино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}.$$

В результате пространственная часть волновой функции кваркино имеет вид

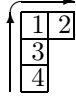
$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_a \psi^a + \epsilon_{\langle 21 \rangle} \psi^{\langle 12 \rangle} + \epsilon_{[13]} \psi^{[31]} + \epsilon_{\langle 32 \rangle} \psi^{\langle 23 \rangle} + \\ &+ \epsilon_{(123)_3} \psi^{(321)_3}. \end{aligned}$$

Волновая функция кваркино может быть представлена с помощью четырех компонент, каждая из которых является функцией над полем гиперчисел. Базисными единицами гиперчисел для кваркино являются

$$1 \cdot \mathbf{1}, \quad a \cdot B, \quad 1 \cdot I, \quad a \cdot A.$$

1. Алгебра синих кваркино

Алгебра синих кваркино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия синих кваркино \mathbb{Q}_b^* есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{\langle 21 \rangle} \psi^{\langle 12 \rangle} + \epsilon_{[13]} \psi^{[31]} + \epsilon_{\langle 32 \rangle} \psi^{\langle 23 \rangle} + \\ &+ \epsilon_{[14]} \psi^{[41]} + \epsilon_{\langle 42 \rangle} \psi^{\langle 24 \rangle} + \epsilon_{[34]} \psi^{[43]} + \epsilon_{(123)_3} \psi^{(321)_3} + \\ &+ \epsilon_{(124)_3} \psi^{(421)_3} + \epsilon_{[134]} \psi^{[431]} + \epsilon_{(234)_{3s}} \psi^{(432)_3} + \\ &+ \epsilon_{(1324)_6} \psi^{(4231)_6}. \end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{Q}_b^*)^p$ то пространство алгебры синих кваркино \mathbb{Q}_b^* представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_b^* = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_b^*)^2 + (\mathbb{Q}_b^*)^3 + (\mathbb{Q}_b^*)^4.$$

Эту алгебру мы рассмотрим в Лекции 15.

2. Алгебра желтых кваркино

Алгебра желтых кваркино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия желтых кваркино \mathbb{Q}_y^* есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{\langle 21 \rangle} \psi^{\langle 12 \rangle} + \epsilon_{[13]} \psi^{[31]} + \epsilon_{\langle 32 \rangle} \psi^{\langle 23 \rangle} + \\ &+ \epsilon_{[14]} \psi^{[41]} + \epsilon_{\langle 42 \rangle} \psi^{\langle 24 \rangle} + \epsilon_{\langle 34 \rangle} \psi^{\langle 43 \rangle} + \epsilon_{(123)_3} \psi^{(321)_3} + \\ &+ \epsilon_{(124)_3} \psi^{(421)_3} + \epsilon_{(134)_2} \psi^{(431)_2} + \epsilon_{(234)_{3s}} \psi^{(432)_3} + \\ &+ \epsilon_{(1324)_7} \psi^{(4231)_7}. \end{aligned}$$

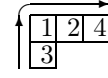
Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{Q}_y^*)^p$ то пространство алгебры желтых кваркино \mathbb{Q}_y^* представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_y^* = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_y^*)^2 + (\mathbb{Q}_y^*)^3 + \mathbb{Q}^4.$$

Эту алгебру мы рассмотрим в Лекции 15.

3. Алгебра красных кваркино

Алгебра красных кваркино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия красных кваркино \mathbb{Q}_r^* есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{\langle 21 \rangle} \psi^{\langle 12 \rangle} + \epsilon_{[13]} \psi^{[31]} + \epsilon_{\langle 32 \rangle} \psi^{\langle 23 \rangle} + \\ &+ \epsilon_{\langle 14 \rangle} \psi^{\langle 41 \rangle} + \epsilon_{\langle 42 \rangle} \psi^{\langle 24 \rangle} + \epsilon_{\langle 34 \rangle} \psi^{\langle 43 \rangle} + \epsilon_{(123)_3} \psi^{(321)_3} + \\ &+ \epsilon_{(124)_3} \psi^{(421)_3} + \epsilon_{(134)_3} \psi^{(431)_3} + \epsilon_{(234)_3} \psi^{(432)_3} + \\ &+ \epsilon_{(1324)_8} \psi^{(4231)_8}. \end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{Q}_r^*)^p$ то пространство алгебры красных кваркино \mathbb{Q}_r^* представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_r^* = \mathbb{Q}^{*0} + \mathbb{Q}^{*1} + (\mathbb{Q}_r^*)^2 + (\mathbb{Q}_r^*)^3 + (\mathbb{Q}_r^*)^4.$$

Эту алгебру мы рассмотрим в Лекции 15.

4. Алгебра лептино

Пространственная часть волновой функции лептино определена следующей диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения для геометрических базисных векторов алгебры лептино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}.$$

В результате пространственная часть волновой функции лептино имеет вид

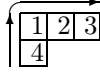
$$\psi = \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_a \psi^a + \epsilon_{\langle ab \rangle} \psi^{\langle ba \rangle} + \epsilon_{(123)} \psi^{(321)}.$$

Волновая функция лептино может быть представлена с помощью четырех компонент, каждая из которых является функцией над полем гиперчисел. Базисными единицами гиперчисел для лептино являются

$$1 \cdot \mathbf{1}, \quad a \cdot \mathbf{1}, \quad 1 \cdot A, \quad a \cdot A.$$

1. Алгебра черных лептино \mathbb{C}_b^*

Алгебра черных лептино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия черных лептино \mathbb{C}_b^* есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{\langle ab \rangle} \psi^{\langle ba \rangle} + \\ &+ \epsilon_{[14]} \psi^{[41]} + \epsilon_{\langle 42 \rangle} \psi^{\langle 24 \rangle} + \epsilon_{\langle 34 \rangle} \psi^{\langle 43 \rangle} + \epsilon_{\langle 123 \rangle} \psi^{\langle 321 \rangle} + \\ &+ \epsilon_{(124)_3} \psi^{(421)_3} + \epsilon_{(134)_3} \psi^{(431)_3} + \epsilon_{(234)} \psi^{(432)} + \\ &+ \epsilon_{4321} \psi^{1234}. \end{aligned}$$

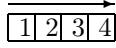
Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{C}_b^*)^p$ то пространство алгебры черных лептино \mathbb{C}_b^* представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_b^* = (\mathbb{C}^*)^0 + (\mathbb{C}^*)^1 + (\mathbb{C}_b^*)^2 + (\mathbb{C}_b^*)^3 + (\mathbb{C}_b^*)^4.$$

Эту алгебру мы рассмотрим в Лекции 15.

2. Алгебра белых лептино \mathbb{C}_w^*

Алгебра белых лептино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия белых лептино \mathbb{C}_w^* есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon_0 \psi^0 + \epsilon_i \psi^i + \epsilon_{\langle ik \rangle} \psi^{\langle ki \rangle} + \epsilon_{\langle ikl \rangle} \psi^{\langle lki \rangle} + \\ &+ \epsilon_{(1324)} \psi^{(4231)}. \end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\epsilon_{i_p \dots i_1}$ обозначить $(\mathbb{C}_w^*)^p$ то пространство алгебры белых лептино \mathbb{C}_w^* представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_w^* = (\mathbb{C}^*)^0 + (\mathbb{C}^*)^1 + (\mathbb{C}_w^*)^2 + (\mathbb{C}_w^*)^3 + (\mathbb{C}_w^*)^4.$$

Эта алгебра была названа коммутативной и рассмотрена в Лекции 11. Для базисных векторов алгебры лептино мы использовали специальное обозначение κ .

V. ТАБЛИЦА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Далее мы используем общепринятое обозначение лептонов и кварков. Так как между лептонами и кварками, с одной стороны, и лептино и кваркино, с другой, имеет место симметрия, то для обозначения лептино и кваркино использованы те же буквы, что и для обозначения симметричных им лептонов и кварков, но в заглавном написании.

В Лекции 13 мы показали, что волновая функция красного и желтого кварков в стандартном представлении распадается на две двух компонентные волновые функции. То есть, эти кварки представлены верхней и нижней частицами. Там же мы показали, что, в отличие от красных и желтых кварков, волновая функция синих кварков в стандартном представлении остается четырех компонентной. То есть, синий кварк представлен одной частицей в каждом поколении. В Лекции 15 мы покажем, что из трех цветных частиц, которые мы назвали кваркино, волновая функция только синих кваркино разделяется в стандартном представлении на две двух компонентные волновые функции. То есть, только синие кваркино представлены верхней и нижней частицами, а красные и желтые кваркино представлены одной частицей каждое в каждом поколении. Отсюда следует, что, если пользоваться развитыми представлениями, то нужно сказать, что в образовании составных частиц (адронов) участвуют красные и желтые кварки и синие кваркино. Можно пойти по другому пути: переобозначить синий кваркино в синий кварк и наоборот, но в этом случае придется нарушить эстетику алгебр, диаграмм и дерева Юнга. В Лекции 15 мы покажем, что лептино также остаются четырех компонентной частицей в каждом поколении, то есть не разделяются на верхнюю и нижнюю частицы. Указанные обстоятельства отражены в Таблице фундаментальных частиц.

1. Фундаментальные частицы первого поколения

1. Лептоны

лептоны	белые	черные
верхние	ν_{e_w}	ν_{e_b}
нижние	e_w	e_b

2. Кварки

кварки	красные	желтые	синие
верхние	u_r	u_y	d_b
нижние	d_r	d_y	

3. Кваркино

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	U_b	D_y	D_r
нижние	D_b		

4. Лептино

черные	белые
E_b	E_w

2. Фундаментальные частицы второго поколения

1. Лептоны

лептоны	белые	черные
верхние	ν_{μ_w}	ν_{μ_b}
нижние	μ_w	μ_b

2. Кварки

кварки	красные	желтые	синие
верхние	c_r	c_y	s_b
нижние	s_r	s_y	

3. Кваркино

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	C_b	S_y	S_r
нижние	S_b		

4. Лептино

черные	белые
M_b	M_w

3. Фундаментальные частицы третьего поколения

1. Лептоны

лептоны	белые	черные
верхние	ν_{τ_w}	ν_{τ_b}
нижние	τ_w	τ_b

2. Кварки

кварки	красные	желтые	синие
верхние	t_r	t_y	b_b
нижние	b_r	b_y	

3. Кваркино

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	T_b	B_y	B_r
нижние	B_b		

4. Лептино

черные	белые
T_b	T_w

VI. КОСМОГОНИЧЕСКИЙ НАБРОСОК

Динамику Вселенной мы свяжем с формированием тензорных компонент действия и пространства-времени. Пусть Вселенная находится в некотором предельном состоянии расширения, за которым начинается ее сжатие. В этом состоянии Вселенная представлена сонмом точек, а тензорные компоненты действия и пространства-времени представлены диаграммами первого уровня дерева Юнга. Сжатие Вселенной приводит к сближению точек и возникновению конфигураций из частей, вращающихся относительно центра и конфигураций из частей, падающих на центр. Таким образом, сжатие Вселенной приводит к возникновению спиновых и инерционных частиц. На этом этапе тензорные компоненты действия и пространства-времени представлены диаграммами второго уровня дерева Юнга. Дальнейшее сжатие приводит к формированию объемов и движению гиперповерхностей. То есть, возникают тензорные компоненты действия и пространства-времени третьего уровня дерева Юнга. В результате формируются структуры, представляющие собой фундаментальные частицы – лептоны, кварки, кваркино, лептино. Дальнейшее сжатие приводит к уплотнению объема, ограничению переносов и вращений частей и формированию некоего единого пульсирующего объема. На этом этапе тензорные компоненты действия и пространства-времени представлены диаграммами четвертого уровня дерева Юнга. Это состояние достигает некоторого предела, за которым следует взрыв и расширение Вселенной с обратным направлением разделения тензорных компонент действия и пространства-времени – от тензоров четвертого ранга к тензорам третьего, второго и первого рангов. На этапе расширения Вселенной мы рассмотрим нерелятивистские комбинации тензора третьего ранга, за которыми стоит выделение фундаментальных частиц из начальной тензорной конфигурации. Симметрии тензора третьего ранга, входящие в волновую функцию определяют тип частицы. Поэтому введем следующее соответствие между симметриями тензора

третьего ранга и типами частиц.*

$$\begin{aligned} [123] &\sim l_1 & [312] &\sim l_2 & [231] &\sim l_3 \\ (123)_2 &\sim q_1 & (312)_2 &\sim q_2 & (231)_2 &\sim q_3 \\ (123)_3 &\sim Q_1 & (312)_3 &\sim Q_2 & (231)_3 &\sim Q_3 \\ \langle 123 \rangle &\sim L_1 & \langle 312 \rangle &\sim L_2 & \langle 231 \rangle &\sim L_3 \end{aligned}$$

Пользуясь этим соответствием перейдем от установленного ранее соотношения

$$123 \cdot \frac{2}{3} = (123)_1 + (123)_2 + (123)_3 + (123)_4,$$

где

$$(123)_1 = [123], \quad (123)_4 = \langle 123 \rangle,$$

$$(123)_2 = (123 - 231 - 312 - 213 - 132 + 321) \cdot \frac{1}{3!},$$

$$(123)_3 = (123 - 231 - 312 + 213 + 132 - 321) \cdot \frac{1}{3!},$$

к ему соответствующему

$$123 \sim l_1 + q_1 + Q_1 + L_1.$$

А это соотношение мы облакаем в следующее образное представление: из тензорной конфигурации **123** выделяется обособленный Мир частиц первого поколения. Этим мы ставим в соответствие соотношению факт существования обособленного Мира частиц первого поколения, в котором мы сами находимся и продуктом которого мы являемся.

При таком подходе соотношению

$$312 \cdot \frac{2}{3} = (312)_1 + (312)_2 + (312)_3 + (312)_4,$$

где

$$(312)_1 = [312], \quad (312)_4 = \langle 312 \rangle,$$

$$(312)_2 = (312 - 132 - 123 + 213 - 231 - 321) \cdot \frac{1}{3!},$$

$$(312)_3 = (312 + 132 - 123 - 213 - 231 + 321) \cdot \frac{1}{3!}.$$

соответствует

$$312 \sim l_2 + q_2 + Q_2 + L_2.$$

*Далее будем пользоваться следующими обозначениями. Лептоны первого, второго и третьего поколений обозначим соответственно l_1, l_2, l_3 . Кварки первого, второго и третьего поколений обозначим соответственно q_1, q_2, q_3 . Кваркино первого, второго и третьего поколений обозначим соответственно Q_1, Q_2, Q_3 . Лептино первого, второго и третьего поколений обозначим соответственно L_1, L_2, L_3 .

А это соотношение мы истолковываем как выделение в процессе расширения Вселенной обособленного Мира * частиц второго поколения из тензорной конфигурации **312**.

Кроме того, соотношению

$$231 = ((231)_1 + (231)_2 + (231)_3 + (231)_4) \cdot \frac{3}{2},$$

где

$$(231)_1 = [231], \quad (231)_4 = \langle 231 \rangle,$$

$$(231)_2 = (231 - 321 - 312 + 132 - 123 - 213) \cdot \frac{1}{3!},$$

$$(231)_3 = (231 + 321 - 312 - 132 - 123 + 213) \cdot \frac{1}{3!},$$

соответствует соотношению

$$231 \sim l_3 + q_3 + Q_3 + L_3.$$

которое нужно истолковывать как выделение в процессе расширения Вселенной обособленного Мира частиц третьего поколения из тензорной конфигурации **231**.

Далее мы обратимся к соотношению, которое легко проверить

$$(123)_2 + (312)_2 + (231)_2 + (123)_4 = 0.$$

Ему соответствует соотношение[†]

$$q_1 + q_2 + q_3 + (L_1 + L_2 + L_3) \cdot \frac{1}{3} \sim 0.$$

Это соотношение мы истолковываем как аннигиляцию Мира кварков и Мира лептино.

Также из соотношения, которое легко проверить,

$$(123)_3 + (312)_3 + (231)_3 + (123)_1 = 0$$

и соответствующего ему соотношения

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \frac{1}{3} \sim 0$$

*Обособленного от других Миров и прежде всего от Мира частиц первого поколения

[†]Мы учитываем, что в нашем подходе

$$[123] = [312] = [231] = ([123] + [312] + [231]) \cdot \frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$l_1 \sim l_2 \sim l_3 \sim (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \frac{1}{3}.$$

А также

$$\langle 123 \rangle = \langle 312 \rangle = \langle 231 \rangle = (\langle 123 \rangle + \langle 312 \rangle + \langle 231 \rangle) \cdot \frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$L_1 \sim L_2 \sim L_3 \sim (L_1 + L_2 + L_3) \cdot \frac{1}{3}.$$

следует аннигиляция Мира кваркино и Мира лептонов.

Можно установить, что имеют место соотношения

$$(\mathbf{312})_2 + (\mathbf{231})_2 + (\mathbf{312})_3 + (\mathbf{231})_3 = -\mathbf{123} \cdot \frac{2}{3},$$

$$(\mathbf{123})_2 + (\mathbf{231})_2 + (\mathbf{123})_3 + (\mathbf{231})_3 = -\mathbf{312} \cdot \frac{2}{3},$$

$$(\mathbf{123})_2 + (\mathbf{312})_2 + (\mathbf{123})_3 + (\mathbf{312})_3 = -\mathbf{231} \cdot \frac{2}{3}.$$

Отсюда, пользуясь принятым соответствием, получим

$$-\mathbf{123} \sim q_2 + q_3 + Q_2 + Q_3,$$

$$-\mathbf{312} \sim q_1 + q_3 + Q_1 + Q_3,$$

$$-\mathbf{231} \sim q_1 + q_2 + Q_1 + Q_2.$$

Последние соотношения свидетельствуют о том, что необходимо допустить существование Миров $(-\mathbf{123})$, $(-\mathbf{312})$, $(-\mathbf{231})$, которые мы назовем *дополнительными* к Мирам частиц первого, второго и третьего поколений $\mathbf{123}$, $\mathbf{312}$, $\mathbf{231}$ соответственно. Дополнительные Миры аннигилируют с Мирами соответствующих поколений.

VII. ВЫВОДЫ

- В рамках классификации частиц в соответствии с подпространствами пространства \mathbb{S} находит объяснение деление фундаментальных частиц со спином на две группы – лептоны и кварки, а также алгебраическое толкование таких характеристик лептонов и кварков как лептонный и барионный заряды.
- Последовательное проведение соответствия между группами частиц и подпространствами пространства действия \mathbb{S} заставляет ввести новую группу частиц с характеристикой симметрично аналогичной спину – инерцией. Эта группа частиц в свою очередь делится на две группы – лептино и кваркино. Указанное деление возникает уже на нерелятивистском уровне, когда в алгебре \mathbb{S} включаются тензоры третьего ранга.
- На релятивистском уровне, когда в алгебре \mathbb{S} включаются тензоры четвертого ранга, группы частиц получают дополнительную классификацию. Лептоны разбиваются на две подгруппы, кварки на три подгруппы.
- Трём подгруппам кварков мы ставим в соответствие кварки трех цветов. Тогда логично предположить, что лептоны двухцветны.

- На релятивистском уровне кваркино разбиваются на три подгруппы, лептино разбиваются на две подгруппы. Трём подгруппам кваркино мы ставим в соответствие кваркино трех цветов. Необходимо также предположить, что лептино двухцветны.