

Лекция 8. Пространство-время лептона.

А. А. Кецарис
(20 мая 2004 г.)

В этой лекции мы показываем, что лептонам необходимо поставить в соответствие свое пространство-время и это пространство-время есть алгебра Клиффорда, образующим пространством которой является пространство-время СТО. Для описания пространственно-временной структуры антилептона необходимо ввести обобщенное сопряженное пространство-время и рассматривать его как алгебру Клиффорда. Указанные обобщения связаны с привлечением дополнительных координат в качестве независимых переменных пространства-времени. Собственное пространство-время лептона является алгеброй. Отсюда необходимо следует квантование этого пространства-времени. Соответствующие квантовые постулаты представляют собой уравнения структуры алгебры пространства-времени.

1. ПОЧЕМУ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ НЕОБХОДИМО ОБОБЩИТЬ ДО АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Отправной точкой для дальнейших рассуждений будет по-прежнему уравнение Дирака, которое мы запишем в соответствии с применяемым нами алгебраическим подходом для действительного представления алгебры Клиффорда:

$$\left(C^{iA}_B \partial_i + \frac{m_e c}{\hbar} C^{0A}_B \right) \cdot \psi^B = 0.$$

Здесь индексы А, В принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

C^{0A}_B – единичная матрица, а C^{iA}_B – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом действительном представлении*.

Согласно алгебраическому подходу индексы А, В, i нумеруют компоненты вектора (базисные векторы и координаты) в пространстве действия, матрицы C^{iA}_B – являются образующими структурными матрицами, определяющими умножение базисных векторов:

$$\mathcal{E}^i \circ \mathcal{E}^A = C^{iA}_B \cdot \mathcal{E}^B.$$

*Смотри раздел V Лекции 5.

В уравнении Дирака свертка индекса В структурной матрицы с соответствующим индексом волновой функции является совершенно законной, так как эти индексы относятся к векторам одного пространства. Однако, помимо этого в уравнении Дирака индекс i структурной матрицы сворачивается с индексом, нумерующим пространственно-временные координаты x^i , что в общем случае совершенно недопустимо. Мы должны предположить, что либо номер матрицы i нумерует векторы другой природы, либо пространственно-временные векторы принадлежат той же алгебре, что и векторы действия. Первая точка зрения противоречит развиваемому нами алгебраическому подходу, согласно которому матрицы C^{iA}_B есть *структурные* матрицы алгебры и индекс i нумерует векторы в *этой* алгебре. Таким образом, нам ничего не остается, как выдвинуть следующий тезис. Пространство-время, рассматриваемое в теории электрона Дирака, необходимо обобщить и рассматривать его как алгебру Клиффорда.

Кроме того, так как структурные матрицы C^{iA}_B представляют образующие базисные векторы \mathcal{E}^i

$$C^{iA}_B \sim \mathcal{E}^i,$$

а x^i – есть координаты пространства-времени специальной теории относительности (СТО), то следует считать, что образующим пространством алгебры Клиффорда как обобщенного пространства-времени является пространство-время СТО.

Так как согласно нашему выводу, сделанному в Лекции 5, алгебру Клиффорда следует соотносить определенной физической структуре – лептону, то и рассматриваемое обобщение пространства-времени мы должны отнести к лептону. Таким образом, вводимое нами обобщенное пространство-время не есть пространство-время вообще (без относительно к чему-либо), а это пространство-время, сопутствующее (соотнесенное) лептону. Иногда мы будем говорить о *собственном* пространстве-времени лептона.

Здесь полезно сделать несколько общих замечаний. Вид операторов дифференцирования по пространственно-временным координатам, входящих в установленные фундаментальные уравнения физики, определяет специфику специальной теории относительности и заставляет переходить к новым представлениям о пространственно-временном континууме, формировать специальную теорию относительности в обобщенном смысле. Так уравнения Максвелла выявили роль оператора Даламбера (в описании процесса распространения электромагнитных колебаний). Следствием этого явилась специальная теория

относительности Эйнштейна и представление о четырехмерном пространственно-временном континууме. Аналогично уравнения Дирака выявили роль оператора

$$C^i A_B \cdot \partial_i \sim \mathcal{E}^i \cdot \partial_i.$$

Следствием этого должно быть обобщение пространства – времени до алгебры Клиффорда, построенной на четырехмерном пространстве – времени как на образующем пространстве. А также разработка соответствующей специальной теории относительности, то есть теории преобразований, сохраняющих пространственно-временные инварианты*.

С нашей точки зрения признаки специфики лептонов следует связать как со структурой вектора действия так и со структурой пространственно-временного вектора.

II. ОБРАЗУЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО – ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ СТО.

Пространство-время СТО обозначим X и будем рассматривать как векторное пространство над полем действительных чисел \mathbb{K} . Вектор $x \in X$ запишем через базисные векторы:

$$x = \mathcal{E}_i x^i,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$; $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ есть базисные векторы геометрического пространства, \mathcal{E}_4 есть базисный вектор времени, $x^i \in \mathbb{K}$ есть координаты вектора.

На X определено *скалярное произведение* векторов. То есть, каждому вектору $a \in X$ ставится в соответствие линейное отображение вектора $x \in X$ в \mathbb{K} , которое записывается следующим образом:

$$\langle a, x \rangle \in \mathbb{K}.$$

Скалярное произведение вектора x на себя определяет его *квадрат длины*

$$\langle x, x \rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2,$$

который связан с вводимым в СТО *квадратом интервала* s^2 следующим образом

$$\langle x, x \rangle = -s^2.$$

Из двух предыдущих соотношений следует известное из СТО выражение для квадрата интервала, которое мы для удобства последующего изложения запишем в следующем виде

$$s^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0. \quad (1)$$

*Этой теме будет посвящена Лекция 10.

Скалярное произведение базисных векторов определяет *метрический тензор* на X :

$$g_{ik} \equiv \langle \mathcal{E}_i, \mathcal{E}_k \rangle = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Обратный метрический тензор g^{ik} определяется условием:

$$g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i.$$

Введем базисные векторы $\mathcal{E}^i \in X$, для которых потребуем выполнения условия[†]

$$\langle \mathcal{E}^i, x \rangle = x^i.$$

Базисные векторы \mathcal{E}^i называются *сопряженными* по отношению к базисным векторам \mathcal{E}_i . Для сопряженных базисных векторов выполняется соотношение:

$$\langle \mathcal{E}^i, \mathcal{E}_k \rangle = \delta_k^i.$$

Сопряженные базисные векторы \mathcal{E}^i связаны с базисными векторами \mathcal{E}_k соотношением:

$$\mathcal{E}^i = \mathcal{E}_k g^{ik}.$$

Вектору $x = \mathcal{E}_i x^i$ поставим в соответствие *сопряженный* вектор

$${}^+x = x_i \mathcal{E}^i,$$

где $x_i = \delta_{ik} x^k$ есть координаты сопряженного вектора. Скалярное произведение вектора x на сопряженный ему вектор \tilde{x} равно

$$\langle x, {}^+x \rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

Множество сопряженных векторов составляет векторное пространство над полем действительных чисел \mathbb{K} , которое обозначим ${}^+X$ и назовем *сопряженным пространством-временем*.

[†]Полезно иметь в виду, что это условие является математической формулировкой физического процесса измерения вектора.

III. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ЛЕПТОНА КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

Обобщим пространство-время X до алгебры Клиффорда \mathbb{X}^\ddagger . Для этого воспользуемся \circ -умножением векторов. И помимо самих векторов x будем рассматривать пары

$$x_1 \circ x_2,$$

тройки

$$x_1 \circ x_2 \circ x_3$$

и в общем случае множество \circ -произведений p векторов

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_p, \quad (2)$$

где x_2, x_2, \dots, x_p также принадлежат X . Векторное пространство, которому принадлежит множество векторов (4) обозначим X^p . Запишем вектор $x \in X^p$ через базисные векторы:

$$x = \mathcal{E}_{i_p \dots i_2 i_1} x^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

где

$$\mathcal{E}_{i_p \dots i_2 i_1} = \mathcal{E}_{i_1} \circ \mathcal{E}_{i_2} \circ \dots \circ \mathcal{E}_{i_p}.$$

Так как число измерений образующего пространства равно 4, то $p \leq 4$.

Введем векторное пространство

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + X^4,$$

где $X^0 = \mathbb{K}$, $X^1 = X$. Наличие на множестве векторов \mathbb{X} операций сложения и \circ -умножения делает это множество алгеброй Клиффорда. Вектор $x \in \mathbb{X}$ можно записать через базисные векторы:

$$x = \mathcal{E}_0 x^0 + \mathcal{E}_i x^i + \mathcal{E}_{ij} x^{ij} + \mathcal{E}_{ijk} x^{ijk} + \mathcal{E}_{1324} x^{1324}. \quad (3)$$

Здесь единица множества действительных чисел \mathbb{K} обозначена через \mathcal{E}_0 . Или с использованием собирательных индексов

$$x = \mathcal{E}_I \cdot x^I.$$

В соответствии с соображениями раздела I векторное пространство \mathbb{X} есть *пространство-время лептона*.

Напомним, что закон умножения базисных векторов \mathcal{E}_I имеет вид

$$\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_L \cdot {}^+C_{KI}^L, \quad (4)$$

[‡]Эта алгебра является частным случаем алгебры \mathbb{L}_{left} , введенной в Лекции 7.

где ${}^+C_{KI}^L$ есть структурные постоянные алгебры. В частном случае умножение $\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_K$ определяет скалярное произведение

$$\langle \mathcal{E}_I, \mathcal{E}_K \rangle = \mathcal{E}_0 \cdot {}^+C_{KI}^0$$

и метрический тензор $g_{KI} = {}^+C_{KI}^0$. Метрический тензор в принятой ранее нами последовательности индексов имеет вид

$$g_{KI} \sim$$

		32	13	21	0	42	14	34	1	2	3	123	134	234	4	124
32	-1															
13	-1															
21		-1														
0			1													
42				1												
14					1											
1324						-1										
34							1									
1								1								
2									1							
3										1						
123											-1					
134												1				
234													1			
4														1		
124															-1	1

Напомним, также, что ${}^+C_{0I}^L = {}^+C_{I0}^L = \delta_{LI}$.

Скалярное произведение вектора x на себя определяет его *квадрат длины*

$$\langle x, x \rangle = g_{KI} x^I x^K.$$

Из условия ассоциативности умножения в алгебре Клиффорда \mathbb{X} следует регулярное представление базисных векторов \mathcal{E}_I :

$$\mathcal{E}_I \sim {}^+C_{KI}^L.$$

При этом вектору x соответствует матрица

$$x \sim x^L_K = {}^+C_{KI}^L x^I.$$

Алгебра Клиффорда \mathbb{X} является алгеброй с делением, то есть для каждого вектора $x \in \mathbb{X}$ за исключением нулевого определен *обратный* вектор x^{-1} в соответствии с выражением

$$x \circ x^{-1} = \mathcal{E}_0. \quad (5)$$

Или в координатном виде

$$g_{IK} \cdot x^I (x^{-1})^K = 1.$$

Здесь, во избежание путаницы, необходимо сделать следующее замечание. Кватернионы являются частным случаем рассматриваемых векторов. Это векторы вида

$$x = \mathcal{E}_0 x^0 + \mathcal{E}_{21} x^{21} + \mathcal{E}_{13} x^{13} + \mathcal{E}_{32} x^{32}.$$

Кватерниону x можно сопоставить кватернион x^* , называемый *сопряженным*

$$x^* = \mathcal{E}_0 x^0 - \mathcal{E}_{21} x^{21} - \mathcal{E}_{13} x^{13} - \mathcal{E}_{32} x^{32},$$

для которого выполняется соотношение

$$x \circ x^* = \langle x, x^* \rangle.$$

С помощью сопряженного кватерниона легко определяется обратный:

$$x^{-1} = \frac{x^*}{\langle x, x^* \rangle}.$$

Можно предположить, что так же (путем изменения знака перед слагаемыми вектора) определяется сопряженный вектор для произвольного вектора алгебры Клиффорда. Однако это не так. В этом можно убедиться, проделав соответствующие вычисления, например, для вектора

$$x = \mathcal{E}_0 x^0 + \mathcal{E}_1 x^1 + \mathcal{E}_{32} x^{32} + \mathcal{E}_{123} x^{123}.$$

Поэтому рассмотренный выше "сопряженный" вектор не допускает простое обобщение и дальнейшее определение сопряженного вектора строится иначе.

1. Обобщенное сопряженное пространство-время. Пространство-время антилептона

Для описания пространственной структуры антилептона введем *обобщенное сопряженное пространство – время*. Для этого обобщим сопряженное пространство-время ${}^+X$, введенное в разделе II, до алгебры Клиффорда ${}^+X^*$

$${}^+X = {}^+X^0 + {}^+X^1 + {}^+X^2 + {}^+X^3 + {}^+X^4,$$

над образующим пространством ${}^+X$ аналогично тому, как это было сделано выше. Здесь ${}^+X^0 = \mathbb{K}$, ${}^+X^1 = {}^+X$.

Вектор ${}^+x \in {}^+X$ можно записать через базисные векторы:

$${}^+x = x_0 \mathcal{E}^0 + x_i \mathcal{E}^i + x_{ij} \mathcal{E}^{ij} + x_{ijk} \mathcal{E}^{ijk} + x_{1324} \mathcal{E}^{1324}.$$

Или с использованием собирательных индексов

$${}^+x = x_I \cdot \mathcal{E}^I.$$

Через \mathcal{E}^0 обозначена единица множества действительных чисел \mathbb{K} . Множество ${}^+X$ является алгеброй Клиффорда.

Скалярное произведение векторов пространств X и ${}^+X$ обобщается на скалярное произведение векторов пространств X и ${}^+X$. В частности, базисные векторы $\mathcal{E}_{k_n \dots k_2 k_1}$ и $\mathcal{E}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ могут быть выбраны так, что

$$\langle \mathcal{E}^{i_1 i_2 \dots i_n}, \mathcal{E}_{k_n \dots k_2 k_1} \rangle = \delta_{k_n}^{i_n} \dots \delta_{k_2}^{i_2} \delta_{k_1}^{i_1}.$$

И в общем случае

$$\langle \mathcal{E}^I, \mathcal{E}^K \rangle = \delta^I_K.$$

Напомним закон умножения базисных векторов \mathcal{E}^I :

$$\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K = C^{IK}_L \cdot \mathcal{E}^L,$$

где C^{IK}_L есть структурные постоянные алгебры. Проекция произведения $\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K$ на направление \mathcal{E}^0 определяет скалярное произведение

$$\langle \mathcal{E}^I, \mathcal{E}^K \rangle = C^{IK}_0 \mathcal{E}^0$$

и обратный метрический тензор $g^{IK} = C^{IK}_0$. Заметим также, что $C^{0K}_I = C^{K0}_I = \delta^K_I$.

Напомним, что из условия ассоциативности умножения в алгебре Клиффорда ${}^+X$ регулярное представление базисных векторов \mathcal{E}^I :

$$\mathcal{E}^I \sim C^{IL}_M.$$

При этом вектору ${}^+x$ соответствует матрица

$${}^+x \sim x^L_M = x_I C^{IL}_M.$$

Связь между структурными постоянными алгебры ${}^+X$ и алгебры X определяется следующим образом:

$$C^{RQ}_P = \delta^{RI} \cdot \delta^{QK} \cdot C^L_{KI} \cdot \delta_{LP}. \quad (6)$$

Обратный метрический тензор g^{IK} определяется условием:

$$g^{IK} g_{KL} = \delta^I_L.$$

Измерение вектора x базисными векторами \mathcal{E}^I дает в результате координаты вектора x^I :

$$\langle \mathcal{E}^I, x \rangle = x^I.$$

Сопряженные базисные векторы \mathcal{E}^I связаны с базисными векторами \mathcal{E}_K соотношением:

$$\mathcal{E}^I = \mathcal{E}_K g^{IK}.$$

Вектору $x = \mathcal{E}_I x^I$ соответствует сопряженный вектор

$${}^+x = x_I \mathcal{E}^I,$$

где $x_I = \delta_{IK} x^K$ есть координаты сопряженного вектора. Скалярное произведение вектора x на сопряженный ему вектор ${}^+x$ равно

$$\langle x, {}^+x \rangle = \delta_{KI} x^I x^K.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

Таким образом, свойства пространства – времени СТО обобщаются в алгебрах Клиффорда X и ${}^+X$.

*Эта алгебра является частным случаем алгебры ${}^+L_{left}$, введенной в Лекции 7.

IV. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КООРДИНАТ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА.

Вектор (3) в пространстве – времени лептона \mathbb{X} определяется следующими координатами

- x^i – координаты вектора-отрезка

$$\mathcal{E}_i x^i$$

в 4-х мерном пространстве СТО. Они включают в себя

- ◊ x^a – координаты геометрического вектора-отрезка*

$$\mathcal{E}_a x^a,$$

- ◊ x^4 – координату вектора времени

$$\mathcal{E}_4 x^4.$$

- x^{ij} – координаты вектора-площади

$$\mathcal{E}_{ij} x^{ij}$$

в пространстве СТО. Они включают в себя

- ◊ x^{ab} – координаты вектора-площади в геометрическом пространстве

$$\mathcal{E}_{ab} x^{ab},$$

- ◊ x^{a4} – координаты вектора-площади в плоскости $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_4)$

$$\mathcal{E}_{a4} x^{a4}.$$

- x^{ijk} – координаты вектора-объема

$$\mathcal{E}_{ijk} x^{ijk}$$

в пространстве СТО. Они включают в себя

- ◊ x^{abc} – координаты вектора-объема в геометрическом пространстве

$$\mathcal{E}_{abc} x^{abc},$$

- ◊ x^{ab4} – координаты вектора-площади в плоскости $(\mathcal{E}_{ab}, \mathcal{E}_4)$

$$\mathcal{E}_{ab4} x^{ab4}.$$

*Напомним, что индексы a, b, c , принимают значения 1,2,3, в отличие от индексов i, j, k , которые принимают значения 1,2,3,4.

- x^{1324} – координаты вектора-4-х мерного объема

$$\mathcal{E}_{1324} x^{1324}$$

в 4-х мерном пространстве СТО.

- x^0 – координаты вектора-длины

$$\mathcal{E}_0 x^0.$$

В представленном виде координаты слагаемых векторов имеют разные размерности. Координаты x^0 , координаты x^i имеют размерность длины, координаты x^{ij} имеют размерность квадрата длины и координаты x^{ijk} и x^{1324} соответственно третьей и четвертой степени длины. Использование векторов с координатами разных размерностей неудобно, особенно при выполнении умножений. Поэтому целесообразно использование векторов либо с безразмерными координатами

$$x = \mathcal{E}_0 \frac{x^0}{R} + \mathcal{E}_i \frac{x^i}{R} + \mathcal{E}_{ij} \frac{x^{ij}}{S} + \mathcal{E}_{ijk} \frac{x^{ijk}}{V} + \mathcal{E}_{1324} \frac{x^{1324}}{W}. \quad (7)$$

либо с координатами одной размерности

$$x = \mathcal{E}_0 x^0 + \mathcal{E}_i x^i + \mathcal{E}_{ij} R \frac{x^{ij}}{S} + \mathcal{E}_{ijk} R \frac{x^{ijk}}{V} + \mathcal{E}_{1324} R \frac{x^{1324}}{W}. \quad (8)$$

Последнюю точку зрения следует считать предпочтительной. Во всяком случае опыт СТО, в которой время приведено к пространственной координате путем умножения на постоянную скорость c , демонстрирует удобство такой точки зрения.

Указанные в этих формулах величины

$$R, S, V, W$$

по нашему замыслу должны выражаться через физические константы. Вопрос о том какие значения принимают эти величины пока оставим открытым. Предварительно для электрона мы будем полагать

$$R = \frac{\hbar}{m_e c}$$

– радиусу электрона.

В безразмерном выражении (7) вектор образующего пространства СТО имеет вид

$$x = \mathcal{E}_a \frac{x^a}{R} + \mathcal{E}_4 \frac{ct}{R}.$$

Последнее слагаемое позволяет ввести еще одну постоянную величину

$$T = \frac{R}{c},$$

имеющую размерность времени.

Далее выразим координаты x^{ij} , x^{ijk} , x^{1324} через соответствующие углы и скорости. В таком виде координаты более понятны и удобны для работы с ними.

x^{ab} – координаты площади в плоскости $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b)$. Площадь x^{ab} можно представить как площадь кругового сектора, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$r^2 = (x^a)^2 + (x^b)^2.$$

В результате будем иметь

$$x^{ab} = \frac{1}{2} r^2 \varphi^{ab},$$

где φ^{ab} – угол в рассматриваемой плоскости.

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2} R^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{x^{ab}}{S} = \frac{r^2 \varphi^{ab}}{R^2}.$$

Вблизи радиуса $r \approx R$ будем иметь

$$\frac{x^{ab}}{S} = \varphi^{ab}$$

и для дифференциалов координат

$$\frac{dx^{ab}}{S} = d\varphi^{ab}.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{ab} = R d\varphi^{ab}.$$

x^{a4}

– координаты площади в плоскости $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_4)$. Площадь x^{a4} будем рассматривать как площадь гиперболического сектора, ограниченного гиперболой, определяемой уравнением

$$-s^2 = (x^a)^2 - (x^4)^2.$$

В результате будем иметь

$$x^{a4} = \frac{1}{2} s^2 \psi^{a4},$$

где ψ^{a4} – угол гиперболического сектора. И для дифференциала координат

$$dx^{a4} = \frac{1}{2} s^2 d\psi^{a4}. \quad (9)$$

Из СТО известно, что гиперболический угол ψ^{a4} связан со скоростью движения. Действительно,

$$\frac{v^a}{c} = \frac{x^a}{x^4} = \frac{\sinh \psi^{a4}}{\cosh \psi^{a4}} = \tanh \psi^{a4}.$$

Отсюда для дифференциала $\frac{dv^a}{c}$

$$\frac{dv^a}{c} = \frac{d\psi^{a4}}{\cosh^2 \psi^{a4}} = (1 - \tanh^2 \psi^{a4}) d\psi^{a4}.$$

Выразим отсюда $d\psi^{a4}$

$$d\psi^{a4} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2 - (x^a)^2} \frac{dv^a}{c}.$$

Подставляя это выражение в (9), получим

$$dx^{a4} = \frac{(x^4)^2}{2} \frac{dv^a}{c}.$$

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2} R^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{a4}}{S} = \frac{(x^4)^2}{R^2} \frac{dv^a}{c}.$$

Вблизи радиуса R мы имеем $x^4 \approx R$ и

$$\frac{dx^{a4}}{S} = \frac{dv^a}{c}.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{a4} = \frac{R dv^a}{c} = T dv^a.$$

x^{abc}

– координаты объема в геометрическом пространстве $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c)$. Объем x^{abc} можно представить как объем шарового сектора, ограниченного сферой, определяемой уравнением

$$r^2 = (x^a)^2 + (x^b)^2 + (x^c)^2.$$

В результате будем иметь

$$x^{abc} = \frac{1}{3} r^3 \varphi^{123},$$

где φ^{123} – телесный угол в рассматриваемом пространстве.

За единичный объем примем $V = \frac{1}{3} R^3$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{x^{abc}}{V} = \frac{r^3 \varphi^{123}}{R^3}.$$

Вблизи радиуса $r \approx R$ будем иметь

$$\frac{x^{abc}}{V} = \varphi^{123}$$

и для дифференциалов координат соответственно

$$\frac{dx^{abc}}{V} = d\varphi^{123}.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{abc} = R d\varphi^{123}.$$

x^{ab4}

– координаты объема в трехмерном пространстве $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_4)$. Вместе с тем x^{ab4} можно рассматривать как координаты площади кругового сектора в плоскости $(\mathcal{E}_{ab}, \mathcal{E}_4)$, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$-r^2 = -(x^{ab})^2 - (x^4)^2.$$

Мы полагаем, что входящие в это уравнение координаты имеют размерность длины. То есть,

$$x^{ab} = R \varphi^{ab}, \quad x^4 = ct.$$

В результате будем иметь

$$x^{ab4} = \frac{1}{2} r^2 \varphi^{ab4},$$

где φ^{ab4} – угол кругового сектора в указанной плоскости. И для дифференциала координат

$$dx^{ab4} = \frac{1}{2} r^2 d\varphi^{ab4}. \quad (10)$$

Покажем, что круговой угол φ^{ab4} связан с угловой скоростью вращения. Действительно,

$$\tan \varphi^{ab4} = \frac{x^{ab}}{x^4} = \frac{R}{c} \frac{\varphi^{ab}}{t}.$$

Здесь

$$\omega^{ab4} = \frac{x^{ab}}{x^4}$$

есть угловая скорость в относительных единицах. Далее учтем, что величина

$$\frac{\varphi^{ab}}{t} = \omega^{ab}$$

представляет собой угловую скорость вращения в плоскости $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b)$ и кроме того введем постоянную величину

$$\Omega = \frac{c}{R} = \frac{1}{T},$$

имеющую размерность угловой скорости. В результате получим

$$\omega^{ab4} = \tan \varphi^{ab4} = \frac{\omega^{ab}}{\Omega}.$$

Отсюда для дифференциала $d\omega^{ab4}$

$$d\omega^{ab4} = \frac{d\varphi^{ab4}}{\cos^2 \varphi^{ab4}} = (1 + \tan^2 \varphi^{ab4}) d\varphi^{ab4}.$$

Выразим отсюда $d\varphi^{ab4}$

$$d\varphi^{ab4} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2 + (x^{ab})^2} d\omega^{ab4}.$$

Подставляя это выражение в (10), получим

$$dx^{ab4} = \frac{(x^4)^2}{2} d\omega^{ab4}.$$

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2} R^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{ab4}}{S} = \frac{(x^4)^2}{R^2} d\omega^{ab4}.$$

Вблизи радиуса R имеем $x^4 \approx R$ и

$$\frac{dx^{ab4}}{S} = d\omega^{ab4} = \frac{d\omega^{ab}}{\Omega}.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{ab4} = \frac{R d\omega^{ab}}{\Omega}.$$

x^{1324}

– координаты вектора-4-х мерного объема в 4-х мерном пространстве СТО. Вместе с тем x^{1324} можно рассматривать как координаты площади кругового сектора в плоскости $(\mathcal{E}_{132}, \mathcal{E}_4)$, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$-r^2 = -(x^{132})^2 - (x^4)^2.$$

Здесь надо полагать, что входящие в это уравнение координаты имеют размерность длины. То есть,

$$x^{132} = R d\varphi^{123}, \quad x^4 = ct.$$

В результате будем иметь

$$x^{1324} = \frac{1}{2} r^2 \varphi^{1324},$$

где φ^{1324} – угол кругового сектора в указанной плоскости. И для дифференциала координат

$$dx^{1324} = \frac{1}{2} r^2 d\varphi^{1324}. \quad (11)$$

Покажем, что круговой угол φ^{1324} связан с телесной скоростью* вращения. Действительно,

$$\tan \varphi^{1324} = \frac{x^{132}}{x^4} = \frac{R}{c} \frac{\varphi^{132}}{t}.$$

* скоростью изменения телесного угла

Здесь

$$\omega^{1324} = \frac{x^{132}}{x^4}$$

есть телесная скорость в относительных единицах. Далее учтем, что величина

$$\frac{\varphi^{132}}{t} = \omega^{132}$$

представляет собой телесную скорость вращения в геометрическом пространстве и кроме того введем постоянную величину

$$\Omega_T = \frac{c}{R} = \frac{1}{T},$$

имеющую размерность телесной скорости, например, стерадиан/сек. В результате получим

$$\omega^{1324} = \tan \varphi^{1324} = \frac{\omega^{132}}{\Omega_T}.$$

Отсюда для дифференциала $d\omega^{1324}$

$$d\omega^{1324} = \frac{d\varphi^{1324}}{\cos^2 \varphi^{1324}} = (1 + \tan^2 \varphi^{1324}) d\varphi^{1324}.$$

Выразим отсюда $d\varphi^{1324}$

$$d\varphi^{1324} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2 + (x^{132})^2} d\omega^{1324}.$$

Подставляя это выражение в (11), получим

$$dx^{1324} = \frac{(x^4)^2}{2} d\omega^{1324}.$$

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2} R^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{1324}}{S} = \frac{(x^4)^2}{R^2} d\omega^{1324}.$$

Вблизи радиуса R будем иметь $x^4 \approx R$ и

$$\frac{dx^{1324}}{S} = d\omega^{1324} = \frac{d\omega^{132}}{\Omega_T}.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{1324} = \frac{R d\omega^{132}}{\Omega_T}.$$

x^0

– координаты вектора длины. Этот вектор наиболее загадочен для объяснения. Для выяснения его смысла рассмотрим частный вектор алгебры Клиффорда

$$x = \mathcal{E}_0 x^0 + \mathcal{E}_a x^a + \mathcal{E}_4 x^4.$$

И вычислим скалярное произведение этого вектора на себя

$$\langle x, x \rangle = (x^0)^2 + (x^a)^2 - c^2 t^2.$$

Если допустить, что $\langle x, x \rangle = 0$, то получим соотношение

$$(x^0)^2 + (x^a)^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Из сравнения его с соотношением (1), известным из СТО, получим, что координата x^0 эквивалентна *интервалу*, вводимому в СТО. На основании изложенного далее мы будем полагать

- рассматриваемые нами векторы алгебры Клиффорда имеют нулевую длину;
- координата x^0 есть интервал, обобщающий интервал, вводимый в СТО.

Мы рассчитываем, что при такой интерпретации координаты x^0 мы не встретимся с какими-либо противоречиями.

Приведенные соображения позволяют записать дифференциал вектора пространства – времени лептона в следующем виде

$$dx = \mathcal{E}_0 dx^0 + \mathcal{E}_a dx^a + \mathcal{E}_4 dx^4 + \mathcal{E}_{ab} R d\varphi^{ab} + \mathcal{E}_{a4} T dv^a + \mathcal{E}_{123} R d\varphi^{123} + \mathcal{E}_{ab4} \frac{R d\omega^{ab}}{\Omega} + \mathcal{E}_{1324} \frac{R d\omega^{132}}{\Omega_T}.$$

Для квадрата длины этого вектора имеем

$$\langle dx, dx \rangle = (dx^0)^2 + (dx^a)^2 - c^2 dt^2 - R^2 (d\varphi^{ab})^2 + T^2 (dv^a)^2 - R^2 (d\varphi^{123})^2 + \frac{R^2 (d\omega^{ab})^2}{\Omega^2} - \frac{R^2 (d\omega^{132})^2}{(\Omega_T)^2} = 0.$$

Это соотношение обобщает интервал, который вводится в СТО.

Из предыдущих формул видно, что параметр R – "радиус" лептона является ключевым и при $R \rightarrow 0$ (соответственно $T \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow \infty$ и $\Omega_T \rightarrow \infty$), то есть по мере удаления от лептона, пространство – время лептона переходит в пространство – время СТО.

V. СОБСТВЕННЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ ИМПУЛЬС ЛЕПТОНА.

Действие лептона S является функцией указанных выше координат. Производные от действия по координатам определяют компоненты собственного импульса лептона. Мы называем его обобщенным, имея в виду, что действие является вектором алгебры Клиффорда, а не скаляром, как в классической физике*.

Компоненты собственного обобщенного импульса лептона таковы

*Смотри Лекции 1 и 2.

- 4-х мерный импульс

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}.$$

В том числе

- ◊ 3-х мерный импульс

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial x^a}$$

- ◊ энергия

$$p_4 = \frac{\partial S}{\partial x^4} = \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{E}{c}$$

- 4-х мерный угловой момент импульса

$$p_{ij} = \frac{\partial S}{\partial x^{ij}}.$$

В том числе

- ◊ 3-х мерный угловой момент импульса или спин

$$p_{ab} = \frac{\partial S}{\partial x^{ab}} = \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi^{ab}} = \frac{M_{ab}}{R},$$

- ◊ 3-х мерная сила

$$p_{a4} = \frac{\partial S}{\partial x^{a4}} = \frac{1}{T} \frac{\partial S}{\partial v^a} = T f,$$

- 4-х мерный телесный момент импульса

$$p_{ijk} = \frac{\partial S}{\partial x^{ijk}},$$

в том числе

- ◊ 3-х мерный телесный момент импульса

$$p_{123} = \frac{\partial S}{\partial x^{123}} = \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi^{123}} = \frac{M_{123}}{R},$$

- ◊ 3-х мерный угловой момент силы

$$p_{ab4} = \frac{\partial S}{\partial x^{ab4}} = \frac{\Omega}{R} \frac{\partial S}{\partial \omega^{ab}} = \frac{F_{ab}}{c}.$$

- Телесный момент силы

$$p_{1324} = \frac{\partial S}{\partial x^{1324}} = \frac{\Omega_T}{R} \frac{\partial S}{\partial \omega^{132}} = \frac{F_{132}}{c}.$$

- Импульс покоя

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial x^0}$$

Так как мы отождествили x^0 с интервалом, вводимым в СТО, то для классического приближения, когда $S = \varepsilon_0 S^{0*}$,

$$p^0_0 = \frac{\partial S^0}{\partial x^0} = -m c.$$

Рассмотренные компоненты импульса участвуют в формировании вектора импульса

$$p = \frac{\partial S}{\partial x^I} \mathcal{E}^I = p_I \mathcal{E}^I.$$

Для квадрата длины этого вектора имеем соотношение, обобщающее связь между импульсом и энергией в СТО

$$\langle p, p \rangle = (m c)^2 + (p_a)^2 - \frac{E^2}{c^2} - \frac{(M_{ab})^2}{R^2} + T^2 (f_a)^2 - \frac{(M_{123})^2}{R^2} + \frac{(F_{ab})^2}{c^2} - \frac{(F_{132})^2}{c^2} = 0. \quad (12)$$

VI. ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КАК ВЕКТОРЫ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Введем символический вектор

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^I} \mathcal{E}^I,$$

в котором операторы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x^I}$$

служат своеобразными координатами. Этот вектор обобщает известный вектор ∇ – набла, вводимый в теории векторного поля. Множество указанных векторов будем рассматривать как алгебру Клиффорда, которую обозначим \mathbb{D}_x . Эта алгебра является частным случаем введенной нами алгебры \mathbb{L}_{left} .

Скалярное произведение вектора $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathbb{D}_x$ и вектора $dx \in \mathbb{X}$ дает инвариантный оператор – дифференциал:

$$d() = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^I} \mathcal{E}^I, \mathcal{E}_K dx^K \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x^I} dx^I.$$

Скалярное произведение вектора $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathbb{D}_x$ на себя дает обобщенный оператор Даламбера:

$$\square = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^I} \mathcal{E}^I, \frac{\partial}{\partial x^I} \mathcal{E}^I \right\rangle = g^{IK} \frac{\partial^2}{\partial x^I \partial x^K}.$$

В соответствии с регулярным представлением имеет место соответствие

$$\frac{\partial}{\partial x^I} \mathcal{E}^I \sim \frac{\partial}{\partial x^I} C^{IK}_L. \quad (13)$$

Операторы дифференцирования можно характеризовать двояким образом. Первая характеристика связана с движением, которое операторы дифференцирования представляют. При этом дифференциал

$$dx = \mathcal{E}_K dx^K$$

*Смотри Лекцию 1.

есть обобщенный сдвиг в пространстве – времени лептона, а оператор

$$\frac{\partial}{\partial x^I} \varepsilon^I$$

есть оператор этого сдвига, или более подробно – оператор движения, описываемого этим сдвигом. С этой точки зрения имеем следующие компоненты оператора дифференцирования

- Оператор сдвига в пространстве – времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^i}$.
 - ◊ Оператор сдвига в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^a}$.
 - ◊ Оператор сдвига во времени $\frac{\partial}{\partial x^4}$.
- Оператор поворотов в 4-х мерном пространстве – времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^{ij}}$.
 - ◊ Оператор поворотов в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^{ab}}$.
 - ◊ Оператор ускоренного поступательного движения $\frac{\partial}{\partial x^{a4}}$.
- Оператор телесных поворотов в 4-х мерном пространстве – времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^{ijk}}$.
 - ◊ Оператор телесных поворотов в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^{abc}}$.
 - ◊ Оператор ускоренного вращения $\frac{\partial}{\partial x^{ab4}}$.
- Оператор ускоренного телесного вращения $\frac{\partial}{\partial x^{1324}}$.
- Оператор растяжения – сжатия (дилатаций) $\frac{\partial}{\partial x^0}$.

Операторы дифференцирования можно характеризовать иначе, так, как это делается в квантовой механике. Из соответствия, вытекающего из регулярного представления базисных векторов (6), следует соответствие

$$\frac{\partial}{\partial x^I} C^{IK}_L \sim (p^0)_I = \frac{\partial S^0}{\partial x^I}.$$

Здесь по повторяющемуся индексу I суммирование не предполагается. Указанное соответствие позволяет характеризовать операторы дифференцирования по соответствующему импульсу. Вслед за классиками квантовой механики мы будем обозначать оператор дифференцирования символом импульса с верхней "крышечкой":

$$\hat{p}_I = \frac{\partial}{\partial x^I} C^{IK}_L$$

и называть его оператором импульса $(p^0)_I^*$.

Например, операторы

$$\hat{p}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} C^{1K}_L, \quad \hat{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} C^{2K}_L,$$

$$\hat{p}_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} C^{3K}_L, \quad \hat{p}_4 = \frac{\partial}{\partial x^4} C^{4K}_L$$

есть соответственно операторы импульсов p_1, p_2, p_3 и энергии $p_4 = \frac{E}{c}$. Для структурных матриц в первом сжатом представлении это операторы Дирака[†]

$$i \begin{bmatrix} \square & -\sigma^a \\ \sigma^a & \square \end{bmatrix} \partial_a, \quad -i \begin{bmatrix} \square & 1 \\ 1 & \square \end{bmatrix} \partial_4$$

Для второго сжатого представления – это операторы Паули

$$\hat{p}_1 = -i \sigma^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \hat{p}_2 = -i \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x^2},$$

$$\hat{p}_3 = -i \sigma^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \hat{p}_4 = -i \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

И, наконец, для третьего сжатого представления – это операторы Шредингера

$$\hat{p}_1 = -i \frac{\partial}{\partial x^1}, \hat{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \hat{p}_3 = -i \frac{\partial}{\partial x^3}, \hat{p}_4 = -i \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Интересно отметить, что при точном вычислении оператор \hat{p}_2 не есть $-i \frac{\partial}{\partial x^2}$, как предполагал Шредингер.

Таким образом, "необычные" квантовомеханические операторы есть "обычные" операторы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x^I} \varepsilon^I,$$

но записанные в регулярном представлении алгебры Клиффорда.

Точно также мы имеем

- операторы момента импульса

$$\hat{p}_{21} = \frac{\partial}{\partial x^{21}} C^{21K}_L, \quad \hat{p}_{13} = \frac{\partial}{\partial x^{13}} C^{13K}_L,$$

$$\hat{p}_{32} = \frac{\partial}{\partial x^{32}} C^{32K}_L,$$

*Здесь также по повторяющемуся индексу I суммирование не предполагается.

[†]Смотри Лекцию 3.

- операторы силы

$$\hat{p}_{14} = \frac{\partial}{\partial x^{14}} C^{14K}_L, \quad \hat{p}_{24} = \frac{\partial}{\partial x^{24}} C^{24K}_L,$$

$$\hat{p}_{34} = \frac{\partial}{\partial x^{34}} C^{34K}_L,$$

- оператор телесного момента импульса

$$\hat{p}_{123} = \frac{\partial}{\partial x^{123}} C^{123K}_L,$$

- операторы момента силы

$$\hat{p}_{124} = \frac{\partial}{\partial x^{124}} C^{124K}_L, \quad \hat{p}_{134} = \frac{\partial}{\partial x^{134}} C^{134K}_L,$$

$$\hat{p}_{234} = \frac{\partial}{\partial x^{234}} C^{234K}_L,$$

- оператор телесного момента силы

$$\hat{p}_{1324} = \frac{\partial}{\partial x^{1324}} C^{1324K}_L,$$

- оператор дилатации

$$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} C^{0K}_L.$$

1. Подалгебры алгебры Клиффорда и операторы независимых движений.

В предыдущем разделе мы охарактеризовали векторы пространства-времени и операторы дифференцирования движением, которое они представляют. В том случае, когда решаются частные задачи, связанные с подгруппами движений, целесообразно установить связь между подалгебрами алгебры Клиффорда и подгруппами движений.

Сначала полезно выделить подалгебры, в которые не входит вектор времени $\mathcal{E}_4 dx^4$. Такие подалгебры назовем *статическими*. Напротив подалгебры, в которые указаный вектор входит назовем *динамическими*.

Примеры статических подалгебр.

- Подалгебра поворотов в геометрическом пространстве. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором – кватернионом

$$dx = \mathcal{E}_0 dx^0 + \mathcal{E}_{21} dx^{21} + \mathcal{E}_{13} dx^{13} + \mathcal{E}_{32} dx^{32}.$$

Структурными матрицами этой подалгебры в комплексном представлении являются единичная матрица и три матрицы Паули, умноженные

на мнимую единицу. Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^0} \mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^{21}} \mathcal{E}^{21} + \frac{\partial}{\partial x^{13}} \mathcal{E}^{13} + \frac{\partial}{\partial x^{32}} \mathcal{E}^{32}.$$

А квантовомеханические операторы в этом случае таковы

$$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} C^{0K}_L, \quad \hat{p}_{ab} = \frac{1}{R} \hat{M}_{ab},$$

где

$$\hat{M}_{ab} = \frac{\partial}{\partial \varphi^{ab}} C^{abK}_L$$

есть операторы момента импульса или спина. Алгебра указанных операторов есть алгебра 3-х мерного спина.

- Подалгебра поворотов в пространстве-времени СТО. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

$$dx = \mathcal{E}_0 dx^0 + \mathcal{E}_{ab} dx^{ab} + \mathcal{E}_{a4} dx^{a4} + \mathcal{E}_{1324} dx^{1324}.$$

Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^0} \mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^{ab}} \mathcal{E}^{ab} + \frac{\partial}{\partial x^{a4}} \mathcal{E}^{a4} + \frac{\partial}{\partial x^{1324}} \mathcal{E}^{1324}.$$

А квантовомеханические операторы в этом случае таковы

$$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} C^{0K}_L, \quad \hat{p}_{ab} = \frac{1}{R} \hat{M}_{ab},$$

$$\hat{p}_{a4} = T \hat{f}_{a4}, \quad \hat{p}_{1324} = \frac{1}{c} \hat{F}_{1324},$$

где помимо операторов момента импульса или спина фигурируют

$$\hat{f}_{a4} = \frac{1}{T^2} \frac{\partial}{\partial v^a} C^{a4K}_L$$

– операторы силы и оператор телесного момента силы

$$\hat{F}_{1324} = \frac{1}{T^2} \frac{\partial}{\partial \omega^{1324}} C^{1324K}_L.$$

Алгебра указанных операторов есть алгебра релятивистского спина.

- Подалгебра сдвигов, поворотов и телесного поворота в геометрическом пространстве. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

$$dx = \mathcal{E}_0 dx^0 + \mathcal{E}_a dx^a + \mathcal{E}_{ab} dx^{ab} + \mathcal{E}_{123} dx^{123}.$$

Структурными матрицами этой подалгебры в комплексном представлении являются восемь

матриц Дирака. Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^0} \mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^a} \mathcal{E}^a + \frac{\partial}{\partial x^{ab}} \mathcal{E}^{ab} + \frac{\partial}{\partial x^{123}} \mathcal{E}^{123}.$$

А квантовомеханические операторы в этом случае таковы

$$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} C^{0K}_L, \quad \hat{p}_a,$$

$$\hat{p}_{ab} = \frac{1}{R} \hat{M}_{ab}, \quad \hat{p}_{123} = \frac{1}{R} \hat{M}_{123},$$

где помимо операторов импульса и спина фигурирует

$$\hat{M}_{123} = \frac{\partial}{\partial \varphi^{123}} C^{123K}_L$$

– оператор телесного момента импульса.

Примеры динамических подалгебр.

- Подалгебра телесных ускоренных вращений. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

$$dx = \mathcal{E}_0 dx^0 + \mathcal{E}_4 dx^4 + \mathcal{E}_{123} dx^{123} + \mathcal{E}_{1324} dx^{1324}.$$

Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^4} \mathcal{E}^4 + \frac{\partial}{\partial x^{123}} \mathcal{E}^{123} + \frac{\partial}{\partial x^{1324}} \mathcal{E}^{1324}.$$

А квантовомеханические операторы в этом случае таковы

$$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} C^{0K}_L, \quad \hat{p}_4 = \frac{1}{c} \hat{E},$$

$$\hat{p}_{123} = \frac{1}{R} \hat{M}_{123}, \quad \hat{p}_{1324} = \frac{1}{c} \hat{F}_{1324},$$

где

$$\hat{E} = \frac{\partial}{\partial t} C^{4K}_L$$

есть оператор энергии. Алгебра указанных операторов очень похожа на алгебру слабого изоспина. На этом вопросе мы остановимся позднее.

- Подалгебра ускоренных поступательных движений. Эта подалгебра вызывает специальный интерес и мы рассмотрим ее отдельно с следующим разделе.

2. Операторы движения виртуального лептона.

Развитое в настоящей Лекции представление о пространстве – времени лептона позволяет подойти к описанию виртуальных частиц (в данном случае лептонов) с новой точки зрения, отличной от Фейнмановских диаграмм.

Виртуальные частицы характеризуются двумя обстоятельствами:

1. для них не выполняется соотношение СТО между импульсом и энергией частицы

$$(mc)^2 + (p_a)^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0,$$

2. виртуальная частица является носителем силы.

В рассмотренном нами пространстве-времени лептона соотношение СТО между импульсом и энергией не выполняется, точнее оно обобщается до соотношения (12). Рассмотрим частный случай этого соотношения

$$(mc)^2 + (p_a)^2 - \frac{E^2}{c^2} + T^2 (f_a)^2 = 0. \quad (14)$$

Из него видно, что оно описывает частицу, являющуюся носителем силы. Таким образом, если это соотношение отнести к виртуальной частице, то оба вышеуказанных обстоятельства будут его следствием. Из (14) следует, что пространство-время виртуальной частицы характеризуется вектором

$$dx = \mathcal{E}_0 dx^0 + \mathcal{E}_a dx^a + \mathcal{E}_4 dx^4 + \mathcal{E}_{a4} T dv^a,$$

оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^0} \mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^a} \mathcal{E}^a + \frac{\partial}{\partial x^4} \mathcal{E}^4 + \frac{\partial}{\partial x^{a4}} \mathcal{E}^{a4}.$$

А квантовомеханический оператор выглядит следующим образом

$$\hat{p} = \frac{\partial}{\partial x^0} C^{0K}_L + \frac{\partial}{\partial x^a} C^{aK}_L + \frac{\partial}{\partial x^4} C^{4K}_L + \frac{\partial}{\partial x^{a4}} C^{a4K}_L. \quad (15)$$

В следующей Лекции мы, основываясь на этом операторе, приведем уравнение движения виртуального лептона.

VII. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Здесь полезно вспомнить подход к векторному пространству, доставшийся нам от классических представлений. Согласно ему векторное пространство уни-

версально и не связано с типом, размерностью* векторной величины. Размерность есть прерогатива координат. Поэтому векторное пространство, установленное для геометрических величин, применяется для величин другой размерности (сил, потока энергии и т.д.). Поэтому базисные векторы, по отношению к которым рассматривается, например, сила есть те же базисные векторы, по отношению к которым рассматривается геометрический отрезок.

С этой точки зрения мы приводим следующую таблицу. В ней \mathbb{L}_{left} и \mathbb{L}_{right} универсальные алгебры*. Они используются при построении пространства – времени, пространства действия, пространства операторов лептонов путем привлечения определенных координат, имеющих соответствующий физический смысл.

\mathbb{L}_{left}	\mathbb{L}_{right}
\mathcal{E}_I	ε_I
$+C^L_{KI}$	C^L_{KI}
\mathbb{X}	\mathbb{S}
x^I	S^I
$x = \mathcal{E}_I \cdot x^I$	$S = \varepsilon_I \cdot S^I$
$d_1 x^I = \chi^I$	$d_1 S^I = \psi^I$
$\chi = \mathcal{E}_I \cdot \chi^I$	$\psi = \varepsilon_I \cdot \psi^I$
$+D_x$	$+D_s$
$\frac{\partial}{\partial x_I}$	$\frac{\partial}{\partial S_I}$
$\mathcal{E}_I \cdot \frac{\partial}{\partial x_I}$	$\varepsilon_I \cdot \frac{\partial}{\partial S_I}$

Аналогичную таблицу мы приводим для сопряженных величин

$+L_{left}$	$+L_{right}$
\mathcal{E}^I	ε^I
$\langle \mathcal{E}^I, \mathcal{E}^K \rangle = \delta^I_K$	$\langle \varepsilon^I, \varepsilon^K \rangle = \delta^I_K$
C^{IK}_L	$+C^{IK}_L$
$+X$	$+S$
x_I	S_I
$+x = x_I \cdot \mathcal{E}^I$	$+S = S_I \cdot \varepsilon^I$
$d_1 x_I = \chi_I$	$d_1 S_I = \psi_I$
$+X = \chi_I \cdot \mathcal{E}^I$	$+S = \psi_I \cdot \varepsilon^I$
D_x	D_s
$\frac{\partial}{\partial x^I}$	$\frac{\partial}{\partial S^I}$
$\frac{\partial}{\partial x^I} \cdot \mathcal{E}^I$	$\frac{\partial}{\partial S^I} \cdot \varepsilon^I$

*Под размерностью здесь понимается не число измерений векторного пространства, а единица измерения векторной физической величины.

*В том смысле, что векторы этих алгебр имеют абстрактные координаты.

Векторы, имеющие отношение к пространству – времени мы вынуждены связывать с алгеброй \mathbb{L}_{left} , а векторы, имеющие отношение к действию – с алгеброй \mathbb{L}_{right} . Причина такого разделения остается неясной.

В дополнение к (6) укажем, что связь между структурными постоянными алгебры $+S$ и алгебры S определяется следующим образом:

$$+C^{RQ}_P = \delta^{RI} \cdot \delta^{QK} \cdot C^L_{KI} \cdot \delta_{LP}.$$

Связь между структурными постоянными алгебры $+X$ и алгебры S определяется следующим образом:

$$C^{RQ}_P = g^{RI} \cdot g^{QK} \cdot C^L_{KI} \cdot g_{LP}.$$

Связь между структурными постоянными алгебры $+S$ и алгебры X определяется следующим образом:

$$+C^{RQ}_P = g^{RI} \cdot g^{QK} \cdot +C^L_{KI} \cdot g_{LP}.$$

Связь между структурными постоянными алгебры $+X$ и алгебры $+S$ определяется следующим образом:

$$C^{RQ}_P = g^R_I \cdot g^Q_K \cdot +C^{IK}_L \cdot g^L_P.$$

где

$$g^R_I = g^{RS} \delta_{SI}.$$

Связь между структурными постоянными алгебры S и алгебры X определяется следующим образом:

$$+C^P_{QR} = g^I_R \cdot g^K_Q \cdot C^L_{KI} \cdot g^P_L.$$

VIII. КВАНТОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ЛЕПТОНА

В Лекции 1 было показано, что квантовые явления объясняются алгебраической структурой векторного пространства. В настоящей Лекции мы пришли к необходимости рассматривать пространство-время лептона как алгебру Клиффорда. Таким образом, обобщая пространство-время до алгебры Клиффорда, мы по необходимости приходим к квантованию пространства-времени лептона. Здесь так же, как для пространства действия, уравнения структуры выступают как квантовые постулаты.

1. Уравнения структуры

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Она проявляется в существовании для алгебр *уравнений структуры*. Далее рассмотрим уравнения структуры для алгебры Клиффорда X . Условимся, что векторы имеют размерность длины. Тогда закон умножения векторов в X запишется так:

$$x = \frac{1}{R} \cdot x_1 \circ x_2. \quad (16)$$

Здесь R – ранее введенная постоянная величина, согласующая размерности правой и левой частей уравнения, имеющая размерность длины.

Заметим, что при $R \rightarrow 0$, то есть вдали от лептона алгебра Клиффорда сводится к пространству-времени СТО. При этом \circ -умножение сводится к умножению вектора на число.

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (4), то получим правило умножения координат векторов сомножителей:

$$x^L = \frac{1}{R} \cdot {}^+C^L_{KI} (x_2)^I (x_1)^K.$$

Далее нам понадобится представление об обратном векторе x^{-1} , для которого выполняется условие (5). Заметим, что для соответствующих векторов закон умножения выглядит так

$$x^{-1} = \left(\frac{1}{R} \cdot x_1 \circ x_2\right)^{-1} = (x_2)^{-1} \circ (x_1)^{-1} \cdot R. \quad (17)$$

Действительно

$$x \circ x^{-1} = \frac{1}{R} \cdot x_1 \circ x_2 \circ (x_2)^{-1} \circ (x_1)^{-1} \cdot R = \mathcal{E}_0.$$

Как и в Лекции 1 при дифференцировании закона умножения (16) будем придерживаться следующих обозначений. Обозначим через d_1x дифференциал вектора x в соотношении (16) при изменении вектора x_1 , обозначим через d_2x дифференциал вектора x в соотношении (16) при изменении вектора x_2 . В соответствии с этим имеем

$$d_1x = \frac{1}{R} dx_1 \circ x_2, \quad d_2x = \frac{1}{R} x_1 \circ dx_2.$$

Из этих выражений получаем

$$dx_2 = R \cdot (x_1)^{-1} \circ d_2x, \quad dx_1 = R \cdot d_1x \circ (x_2)^{-1}. \quad (18)$$

С использованием принятых обозначений рассмотрим второй дифференциал d_2d_1x . Из (16) для него имеет место

$$d_2d_1x = \frac{1}{R} dx_1 \circ dx_2. \quad (19)$$

Используя (18) и (17), получим

$$d_2d_1x = d_1x \circ (x)^{-1} \circ d_2x. \quad (20)$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при $x = R\mathcal{E}_0$ и $(x)^{-1} = \frac{1}{R}\mathcal{E}_0$, уравнение (20) принимает вид

$$d_2d_1x = \frac{1}{R} d_1x \circ d_2x. \quad (21)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры \mathbb{X} в векторной форме.

Подставляя в (21) выражения дифференциалов через дифференциалы координат векторов пространства – времени и пользуясь законом умножения базисных векторов (3), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2d_1x^L = \frac{1}{R} {}^+C^L_{KI} \cdot d_2x^I \cdot d_1x^K. \quad (22)$$

Предыдущие рассуждения обобщаются на дифференциал n – ой степени

$$d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 x.$$

Для него уравнения структуры имеют вид

$$d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 x = \frac{1}{R^{n-1}} d_1 x \circ d_2 x \circ \dots \circ d_{n-1} x \circ d_n x.$$

2. Квантовые постулаты и волновая функция пространства-времени

В уравнении (21) введем обозначение

$$\chi = d_1x$$

и назовем вектор χ *волновой функцией пространства – времени*.

Кроме того, введем обозначение d для дифференциала d_2 . Уравнение структуры в новых обозначениях принимает вид

$$d\chi = \frac{1}{R} \chi \circ dx. \quad (23)$$

Это уравнение можно записать для координат волновой функции $\chi^I = d_1x^I$:

$$d\chi^L = \frac{1}{R} {}^+C^L_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K. \quad (24)$$

Уравнения (23), (24) имеют вид задачи на собственные значения оператора дифференциала d .

Итак мы получили следующий результат: уравнения структуры алгебры \mathbb{X} могут быть представлены как задача на собственные значения оператора дифференциала d . То есть, уравнения структуры, представленные в виде (23) и (24) выступают как квантовые постулаты.

Будем рассматривать пространственно – временные координаты как функции вектора действия. Выразим дифференциал d в виде

$$d = \frac{\partial}{\partial S^M} \cdot dS^M$$

и введем обобщенные обратные импульсы:

$$(p^{-1})_M = \frac{\partial x}{\partial S^M} = \mathcal{E}_I \cdot \frac{\partial x^I}{\partial S^M} = \mathcal{E}_I \cdot (p^{-1})^I_M.$$

Тогда задача на собственные значения (24) приобретает вид

$$\frac{\partial \chi^L}{\partial S^M} = \frac{1}{R} {}^+C^L{}_{KI} \cdot (p^{-1})^I{}_M \cdot \chi^K. \quad (25)$$

Таким образом, исходя из алгебраической структуры пространства-времени мы пришли к задаче на собственные значения для пространственно-временных векторов и к явлению, которое представляет собой квантование пространства-времени.

IX. ВЫВОДЫ

- Вид уравнений Дирака заставляет считать, что лептонам необходимо соотнести свое собственное пространство-время. Оно обобщает пространство-время специальной теории относительности (СТО).
- Собственное пространство-время лептона необходимо рассматривать как алгебру Клиффорда, образующим пространством которой является пространство-время СТО.
- Указанные обобщения связаны с привлечением дополнительных координат в качестве независимых переменных пространства-времени. Помимо x^a – координат вектора-линии и x^4 – координат времени к ним относятся x^{ab} – координаты вектора-площади (вектора угла), x^{a4} – координаты вектора-скорости, x^{abc} – координаты вектора-объема (вектора телесного угла), x^{ab4} – координаты вектора угловой скорости, x^{abc4} – координаты вектора телесной угловой скорости.
- Дополнительным координатам соответствуют дополнительные компоненты импульса. К ним относятся 3-х мерный импульс p_a , энергия $p_4 = E/c$, 3-х мерный угловой момент импульса или спин $p_{ab} = M_{ab}/R$, 3-х мерная сила $p_{a4} = T f_a$, 3-х мерный телесный момент импульса $p_{123} = M_{123}/R$, 3-х мерный угловой момент силы $p_{ab4} = F_{ab}/c$, телесный момент силы $p_{1324} = F_{132}/c$, импульс покоя p_0 .
- Собственное пространство-время лептона является алгеброй. Отсюда необходимо следует квантование этого пространства-времени. Исходные квантовые постулаты представляют собой уравнения структуры алгебры Клиффорда Ж.